1. Um professor de Matemática tem duas turmas (A e C). No final do ano analisou os resultados dos testes das duas turmas separadamente e concluiu que as duas distribuições eram aproximadamente normais e ambas tinham média de 12,7 valores. Já o desvio padrão da turma A era de 2,1 valores e o da turma C de 3,8 valores.

Qual dos seguintes acontecimentos é mais provável?

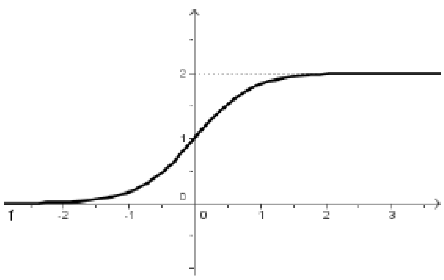
(A) Seleccionar ao acaso um teste da turma A e ter nota inferior a 10

(B) Seleccionar ao acaso um teste da turma C e ter nota inferior a 10

(C) Seleccionar ao acaso um teste da turma A e ter nota superior a 10

(D) Seleccionar ao acaso um teste da turma C e ter nota superior a 10

2. Considere a sucessão $u_n = \dfrac{10}{\log n}$ e a função f, de domínio $\mathbb{R}$, cuja representação gráfica está na figura ao lado, em que $f(0)=1$.

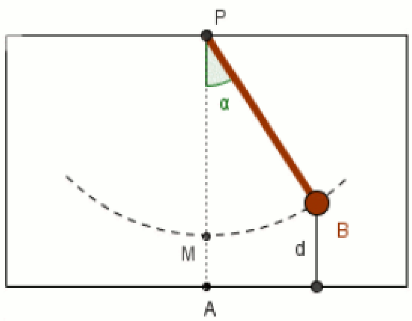


Qual o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** $+\infty$

4. Considere a figura ao lado na qual se representa:

- um pêndulo B que oscila suspenso no ponto P, tal que $\overline{BP}=4$
- $\overline{PA}=5$ e $\overline{MA}=1$
- α é a medida do ângulo $\measuredangle APB$, $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$



Seja d a distância do ponto B ao solo.

Qual das seguintes expressões representa a variação de d em função de α ?

(A) $4 \cdot \text{sen } \alpha + 5$ **(B)** $5 - 4 \cdot \text{sen } \alpha$

(C) $4 \cdot \cos\alpha + 1$ **(D)** $5 - 4 \cdot \cos\alpha$

1. Num torneio de damas, cada participante defrontou cada um dos outros por duas vezes (uma com as peças brancas e outra com as pretas). Sabendo que participaram 10 pessoas no torneio, quantas partidas se realizaram?

(A) 10×2 **(B)** ${}^{10}C_2$ **(C)** ${}^{10}A_2$ **(D)** ${}^{10}A'_2$

2. Admita que, numa dada altura do ano, a variável «*temperatura média das localidades*» na zona costeira sul da ilha da Madeira segue uma distribuição aproximadamente normal, de média 24° Celsius. Suponha que um turista visita, aleatoriamente, uma dessas localidades.

Relativamente à temperatura desta localidade, é mais provável que ela seja:

(A) inferior a 27º Celsius **(B)** superior a 27º Celsius

(C) inferior a 22º Celsius **(D)** superior a 22º Celsius

4. Para qual das seguintes funções se tem $h(a)\cdot h''(a)<0$, para $a>1$?

(A) $h(x)=x, x\in IR$ **(B)** $h(x)=e^x, x\in IR$

(C) $h(x)=\ln(x), x\in IR^+$ **(D)** $h(x)=sen(x), x\in IR$

5. Seja w um número complexo tal que $Arg(w)=\dfrac{\pi}{3}$.

Qual é o valor de $Arg\left(\dfrac{-1}{w}\right)$?

(A) $-\dfrac{\pi}{3}$ **(B)** $\dfrac{\pi}{3}$ **(C)** $\dfrac{2\pi}{3}$ **(D)** $\dfrac{4\pi}{3}$

4. Considere a função definida por $f(x) = e^{sen(x)}$.

A recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $-\pi$ é:

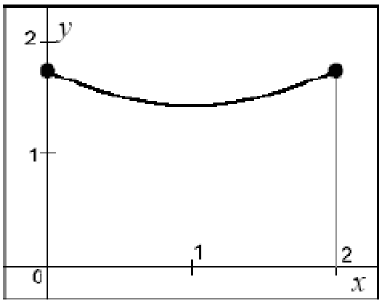
(A) $y = -x - \pi + 1$ **(B)** $y = -x - e + 1$

(C) $y = x + \pi + 1$ **(D)** $y = x + e + 1$

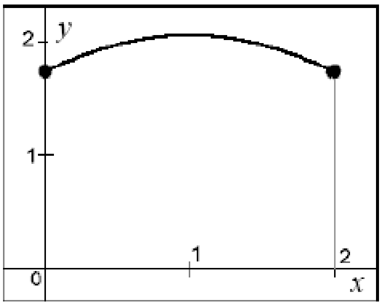
5. Considere um estrutura cúbica de lado 2. Uma formiga movimenta-se sobre as arestas dessa estrutura.

Sabendo que a formiga caminha ao longo de uma aresta e a atravessa na sua totalidade, sem voltar para trás, qual dos seguintes gráficos representa a distância y, da formiga ao centro do cubo, em função da distância x, percorrida nessa aresta?

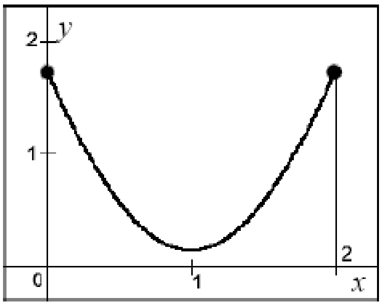
(A)



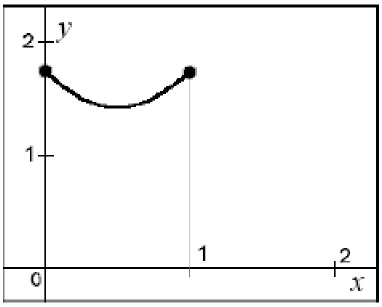
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é apresentada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. O Joaquim irá apresentar o seu trabalho da disciplina de Área de Projecto com as três colegas de grupo, a Marta, a Núria e a Olga. A apresentação tem cinco pontos, pelo que ficou decidido que cada rapariga irá apresentar um ponto e o Joaquim dois. Para sortear a sequência de apresentação foram colocados 5 números num saco, tendo o Joaquim retirado 2 números e as colegas um número cada, correspondendo cada número a um ponto da apresentação que será feita por ordem crescente dos pontos.

1.1 Quantas sequências de apresentação distintas é possível definir?

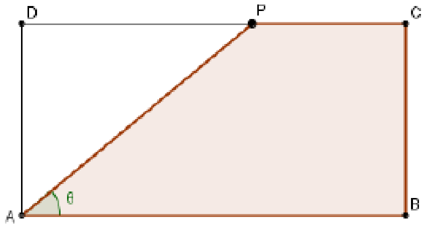
1.2 Considere a variável aleatória X: «Nº do ponto que o Joaquim apresentará em primeiro lugar». Construa a distribuição de probabilidades da variável X (sugestão: considere todos os pares de números que o Joaquim pode retirar).

2. Seja $z = \sqrt{2}\ \text{cis}\ \dfrac{\pi}{12}$.

2.1 **Sem recorrer à calculadora gráfica**, determine $(3+3i)\cdot z-3$ e apresente o resultado na forma trigonométrica.

2.2 Seja $w = a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Quais os valores que a e b podem tomar para que $z^2+2\cdot w$ seja número real negativo.

3. Considere o rectângulo $[ABCD]$ cujos lados medem 2 e 4 $u.m.$ e o ponto P que se desloca sobre o lado $[CD]$. Seja θ o ângulo $\measuredangle BAP$.



3.1 Se o ponto P coincidir com o ponto C, indique um valor (aproximado às centésimas de radiano) para o ângulo θ associado e indique o valor máximo que o ângulo θ pode atingir, justificando as suas respostas.

3.2 Mostre que o perímetro do trapézio rectângulo $[APCB]$ varia em função de θ de acordo com a expressão $\mathrm{P}(\theta)=10+\dfrac{2}{\operatorname{sen}(\theta)}-\dfrac{2}{\operatorname{tg}(\theta)}$.

3.3 Mostre que a derivada da expressão anterior é $\mathrm{P}'(\theta)=\dfrac{2-2\cos(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)}$ e justifique que a função P é crescente para os valores de θ em causa.

1. O Joaquim gravou um CD com 12 músicas. 5 são de bandas portuguesas, 8 de hip-hop e duas com a duas características referidas. Colocou-o num leitor no modo aleatório, que reproduz aleatoriamente as faixas, sem as repetir.

1.1 Qual é a probabilidade de as músicas das bandas portuguesas serem tocadas todas de seguida (ou seja, sem nenhuma estrangeira entre elas)?

1.2 Quando começou a tocar a primeira música, o Joaquim percebeu logo que a música não era de hip-hop, mas não identificou imediatamente a música. Qual a probabilidade de ser de uma banda portuguesa?

1.3 Os acontecimentos

- H: «A primeira música a tocar é de hip-hop»
- P: «A primeira música a tocar é de uma banda portuguesa»

são independentes? Justifique a sua resposta.

2. A luminosidade de uma estrela é medida pela sua magnitude absoluta (M). A observação da mesma estrela a partir da Terra revela um brilho que é medido através da magnitude aparente (m). A segunda depende da primeira e varia em função da distância (d, em parsec) entre a estrela e a Terra de acordo com a expressão $M = m + 5 - 5\log d$.

2.1 Sabendo que a Estrela Polar tem magnitude aparente de 2,15 e magnitude absoluta de -3,64, determina um valor aproximado às unidades, da distância, em parsec, da Estrela Polar à Terra.

2.2 A que distância da Terra a magnitude absoluta e a magnitude aparente de uma estrela são iguais?

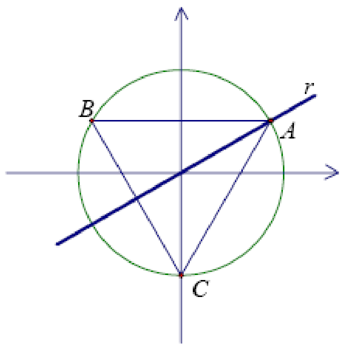
2.3 Nas duas alíneas seguintes, considere apenas as estrelas com magnitude aparente igual a $m = 1$.

2.3.1 Estude a monotonia da função por processos analíticos e explique a variação da magnitude absoluta em função da distância à Terra.

2.3.2 Determine a expressão analítica da função que permite calcular a distância d de uma estrela à Terra em função da sua magnitude absoluta M.

3. Considere o número complexo $w = 8cis\dfrac{\pi}{2}$.

3.1 Calcule $|w+3|$.

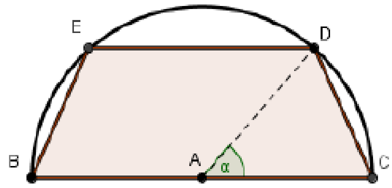


3.2 Na figura ao lado estão as representações geométricas das três raízes cúbicas de w. Defina por uma condição a recta *r*, sabendo que é perpendicular ao segmento de recta $[BC]$ e contem o ponto médio desse segmento.

3.3 Seja $z = a - i$. Determine o valor de a, para que $Arg(z \cdot w) = \dfrac{\pi}{4}$

(i designa a unidade imaginária).

3. Considere a figura ao lado, na qual se representa uma semicircunferência de centro em A e de raio 1. α designa o ângulo $\sphericalangle CAD$ e $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



O ponto D move-se sobre a semicircunferência e o ponto E acompanha esse movimento de forma que os segmentos $[ED]$ e $[BC]$ são sempre paralelos.

3.1 Mostre que a área do trapézio $[CBED]$ é dada pela expressão $\mathrm{A}(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$. (sugestão: considere o triângulo rectângulo $\triangle[APD]$ com P sobre o segmento $[AC]$).

3.2 Calcule $\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} A(\alpha)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

3.3 Recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy prove que existe um ângulo β maior que $\frac{\pi}{6}$ e menor que $\frac{\pi}{4}$, para o qual a área do trapézio $[CBED]$ é 1.