

Ficha de Trabalho

- Preparação para o Teste Nacional Intermédio – Janeiro 2011

1ª Parte - Escolha múltipla

Nesta parte, indica a única opção correcta, como resposta de cada uma das questões

1. Sabe-se que $\log_2 a = \frac{1}{5}$. Qual é o valor de $\log_2 \left(\frac{a^5}{8}\right)$?

- A) -1 B) -2 C) -3 D) -4

2. O gráfico da função g , definida por $g(x) = e^{2x+3c}$ intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada b . qual é o valor de c ?

- A) $\frac{\ln b}{2}$ B) e^{3b} C) $\ln(\sqrt[3]{b})$ D) e^b

3. Seja $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = \log_2(2 \times \sqrt[3]{x})$. Qual das seguintes expressões também pode definir a função h ?

- A) $2 + \log_2(\sqrt[3]{x})$ B) $2 \cdot \log_2(\sqrt[3]{x})$ C) $\frac{3 + \log_2 x}{3}$ D) $\frac{1 + \log_2 x}{2}$

4. Considera o conjunto $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Ao considerar ao acaso dois números deste conjunto, qual é a probabilidade de ambos pertencerem ao domínio da função real de variável real definida por $f(x) = \log_{10}(x^2 - 9)$?

- A) $\frac{1}{{}^9C_2}$ B) $\frac{2}{{}^9C_2}$ C) $\frac{4}{{}^9C_2}$ D) $\frac{11}{12}$

5. Dois dados equilibrados, um amarelo e um branco, são lançados ao mesmo tempo. Sejam a e b o número de pintas na face voltada para cima do dado amarelo e o branco respectivamente. Qual é a probabilidade de 2^{a+b} ser inferior a 16?

- A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{11}{12}$

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$)

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos independentes;
- $P(A) = 0,4$ e $P(B) = 0,5$

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

- (A) 0,6 (B) 0,7 (C) 0,8 (D) 0,9

2. Qual é o valor de $\log_5 \left(\frac{5^{1000}}{25} \right)$?

- (A) 40 (B) 500 (C) 975 (D) 998

Março de 2010

1. Quantos números pares de cinco algarismos diferentes se podem escrever, utilizando os algarismos do número 12345 ?

- (A) 24 (B) 48 (C) 60 (D) 96

2. Numa certa linha do Triângulo de Pascal, o segundo elemento é 2009.

Quantos elementos dessa linha são maiores do que *um milhão* ?

- (A) 2004 (B) 2005 (C) 2006 (D) 2007

3. Uma variável aleatória X tem distribuição normal.

Sabe-se que $P(X > 50)$ é inferior a $P(X < 40)$

Qual dos números seguintes pode ser o valor médio da variável aleatória X ?

- (A) 42 (B) 45 (C) 48 (D) 51

4. Na figura 1 estão representados oito cartões, numerados de 1 a 8.

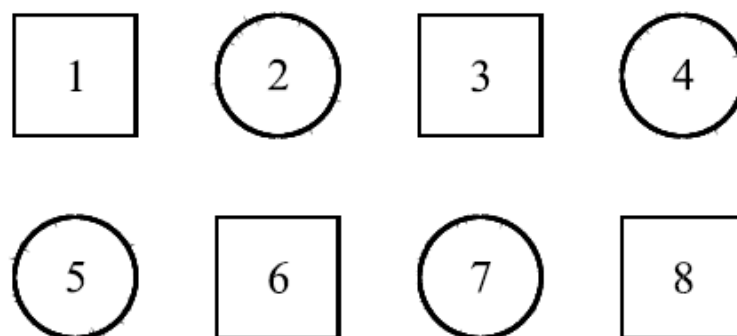


Figura 1

Escolhe-se, ao acaso, um destes oito cartões e observa-se a sua forma e o número nele inscrito.

Considere os seguintes acontecimentos, associados a esta experiência aleatória:

A : «O número do cartão escolhido é maior do que $\sqrt{30}$ »

B : «O cartão escolhido é um círculo»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

5. A estatística revela que o basquetebolista *Zé Mão Quente* falha 10% dos lances livres que executa.

Num treino, o *Zé Mão Quente* vai executar uma série de oito lances livres.

Indique qual dos acontecimentos seguintes tem probabilidade igual a

$$1 - 0,9^8 - {}^8C_7 \times 0,9^7 \times 0,1$$

- (A) O *Zé Mão Quente* concretiza pelo menos seis lances livres.
(B) O *Zé Mão Quente* concretiza pelo menos sete lances livres.
(C) O *Zé Mão Quente* concretiza no máximo seis lances livres.
(D) O *Zé Mão Quente* concretiza no máximo sete lances livres.

Dezembro de 2009

1. A Ana, a Bárbara, a Catarina, o Diogo e o Eduardo vão sentar-se num banco corrido, com cinco lugares.

De quantas maneiras o podem fazer, ficando uma rapariga no lugar do meio?

- (A) 27 (B) 72 (C) 120 (D) 144

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{n}$	$\frac{4}{n}$	$\frac{5}{n}$

Qual é o valor de n ?

- (A) 4 (B) 5 (C) 12 (D) 15

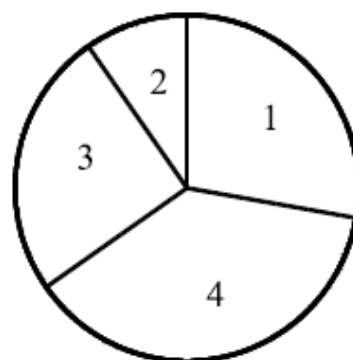
Março de 2009

1. A soma dos dois primeiros elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 13. Quantos elementos dessa linha são menores do que 70?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

2. Na figura está representado um círculo dividido em quatro sectores circulares diferentes, numerados de 1 a 4.

Estão disponíveis **cinco** cores para pintar este círculo.



Pretende-se que sejam respeitadas as seguintes condições:

- todos os sectores devem ser pintados;
- cada sector é pintado com uma única cor;
- sectores com um raio em comum não podem ficar pintados com a mesma cor;
- o círculo deve ficar pintado com **duas** ou com **quatro** cores.

De quantas maneiras diferentes pode o círculo ficar pintado?

(A) 140 (B) 230 (C) 310 (D) 390

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $P(A) = 0,5$ e que $P(B) = 0,7$. Podemos então garantir que ...

- (A) A e B são acontecimentos contrários
- (B) A e B são acontecimentos compatíveis
- (C) A está contido em B
- (D) o acontecimento $A \cup B$ é certo

4. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	a	b	0,5

(a e b designam números reais)

O valor médio desta variável aleatória é 1,4

Qual é o valor de a ?

- (A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,5
5. O diâmetro, em milímetros, dos parafusos produzidos por uma certa máquina é uma variável aleatória X com distribuição normal, de valor médio 9.
- Qualquer parafuso produzido por essa máquina passa por um controle de qualidade. Ao passar por esse controle, o parafuso é aprovado se o seu diâmetro estiver compreendido entre 8,7 e 9,3 milímetros. Caso contrário, é rejeitado.
- Sabe-se que 99,73% dos parafusos são aprovados.
- Qual é o desvio padrão da variável aleatória X ?

- (A) 0,1 (B) 0,3 (C) 0,6 (D) 0,9

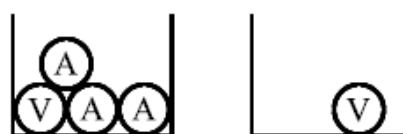
Dezembro de 2008

1. De um número real x sabe-se que $\log_5(x) = \pi - 1$
- Indique o valor de $5x$

- (A) $25^{\pi-1}$ (B) $5^{\pi-1}$ (C) 5^π (D) $5(\pi - 1)^5$

2. Uma caixa 1 tem uma bola verde e três bolas amarelas.

Uma caixa 2 tem apenas uma bola verde.



Caixa 1

Caixa 2

Considere a experiência que consiste em tirar, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa 1, colocá-las na caixa 2 e, em seguida, tirar, também ao acaso, uma bola da caixa 2.

Sejam M e V os acontecimentos:

M : «as bolas retiradas da caixa 1 têm a mesma cor»

V : «a bola retirada da caixa 2 é verde»

Indique o valor da probabilidade condicionada $P(V | \bar{M})$

(Não necessita de recorrer à fórmula da probabilidade condicionada)

- (A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 1

3. Os códigos dos cofres fabricados por uma certa empresa consistem numa sequência de cinco algarismos como, por exemplo, 0 7 7 5 7

Um cliente vai comprar um cofre a esta empresa. Ele pede que o respectivo código satisfaça as seguintes condições:

- tenha exactamente três algarismos 5
- os restantes dois algarismos sejam diferentes
- a soma dos seus cinco algarismos seja igual a dezassete

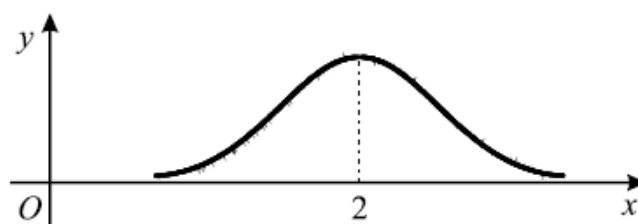
Quantos códigos diferentes existem satisfazendo estas condições?

- (A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 80

4. A soma dos dois últimos elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 31. Qual é o quinto elemento da linha anterior?

- (A) 23 751 (B) 28 416 (C) 31 465 (D) 36 534

5. A Curva de Gauss representada na figura está associada a uma variável aleatória X , com distribuição Normal.



Tal como a figura sugere, a curva é simétrica relativamente à recta de equação $x = 2$

Para um certo valor de a , tem-se que $P(X > a) = 15\%$

Qual dos seguintes pode ser o valor de a ?

- (A) 1 (B) 1,5 (C) 2 (D) 2,5

Janeiro de 2008

1. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $e^{-x} > \frac{1}{e}$

(A) $] -\infty, -1[$

(B) $] -\infty, 1[$

(C) $] -1, +\infty[$

(D) $]1, +\infty[$

2. Seja a um número real maior do que 1.

Indique o valor de $\log_a (a \times \sqrt[3]{a})$

(A) $\frac{5}{4}$

(B) $\frac{4}{3}$

(C) $\frac{5}{3}$

(D) $\frac{3}{2}$

5. Um saco contém vinte bolas, numeradas de 1 a 20.

Ao acaso, extraem-se simultaneamente três bolas do saco e anotam-se os respectivos números.

Qual é a probabilidade de o maior desses três números ser 10 ?

(A) $\frac{24}{20C_3}$

(B) $\frac{28}{20C_3}$

(C) $\frac{32}{20C_3}$

(D) $\frac{36}{20C_3}$

6. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), ambos com probabilidade não nula.

Sabe-se que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

(A) 0

(B) 1

(C) $P(A)$

(D) $\frac{P(A)}{P(B)}$

7. O Jorge tem seis moedas no bolso.

Ele retira, simultaneamente e ao acaso, duas dessas seis moedas.

Seja X a quantia, em cêntimos, correspondente às duas moedas retiradas.

Sabe-se que a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é

x_i	20	30	40	60	70
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{6C_2}$	$\frac{6}{6C_2}$	$\frac{1}{6C_2}$	$\frac{3}{6C_2}$	$\frac{2}{6C_2}$

Quais poderiam ser as seis moedas que o Jorge tinha inicialmente no bolso?



1. Seja (x_n) a sucessão de termo geral $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
 Seja (y_n) a sucessão de termo geral $y_n = 1 + \ln(x_n)$ ($\ln$ designa logaritmo de base e)
 Qual é o valor de $\lim y_n$?

(A) 2 (B) 3 (C) $1 + e$ (D) $2 + e$

2. Indique o número real que é solução da equação $e^{x-2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$

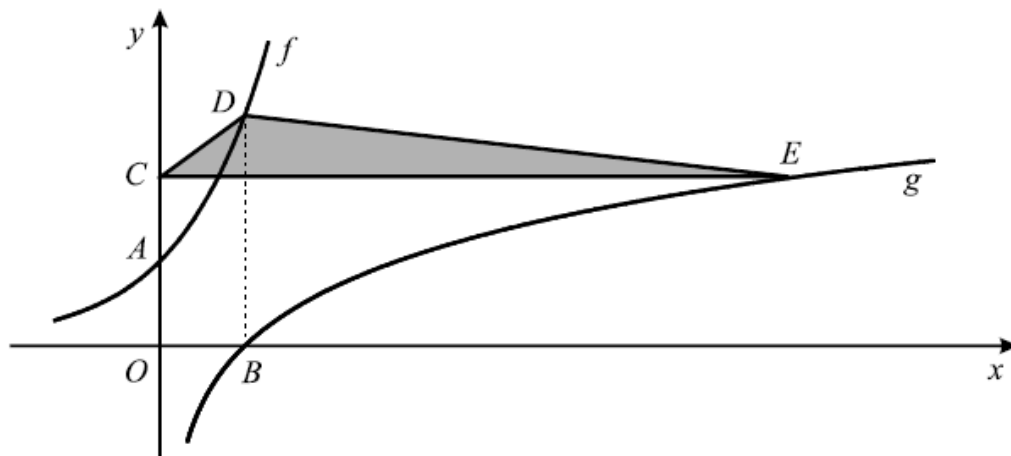
3. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_3(1 - x) \leq 1$$

(A) $[-2, 1[$ (B) $[-1, 2[$
 (C) $] -\infty, -2]$ (D) $[-2, +\infty[$

4. Na figura abaixo estão representadas, em referencial o. n. xOy :
- parte do gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$
 - parte do gráfico da função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \ln x$ ($\ln$ designa logaritmo de base e)

O ponto A é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Oy e o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico de g com o eixo Ox .



Na figura está também representado um triângulo $[CDE]$.

O ponto C pertence ao eixo Oy , o ponto D pertence ao gráfico de f e o ponto E pertence ao gráfico de g .

Sabe-se ainda que:

- a recta BD é paralela ao eixo Oy e a recta CE é paralela ao eixo Ox
- $\overline{AC} = \overline{OA}$

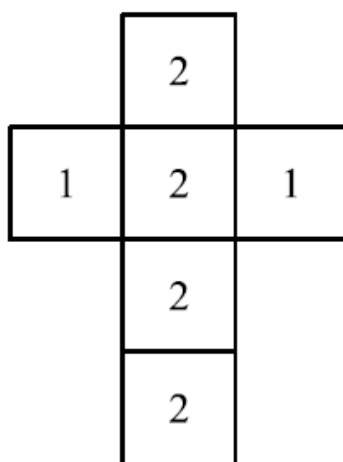
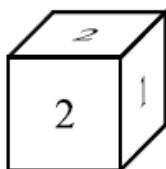
Qual é a área do triângulo $[CDE]$?

(A) $\frac{(e-1)\ln 2}{2}$ (B) $\frac{(e^2-1)\ln 2}{2}$
 (C) $\frac{e(e-2)}{2}$ (D) $\frac{e^2(e-2)}{2}$

5. Todos os alunos de uma turma de uma escola secundária praticam pelo menos um dos dois desportos seguintes: andebol e basquetebol.
Sabe-se que:
- metade dos alunos da turma pratica andebol
 - 70% dos alunos da turma pratica basquetebol
- Escolhe-se ao acaso um aluno dessa turma e constata-se que ele é praticante de andebol.
Qual é a probabilidade de ele praticar basquetebol?

(A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,4

6. Na figura está representado um dado equilibrado, bem como a respectiva planificação.



Lança-se este dado duas vezes.

Seja X a variável aleatória: soma dos números saídos nos dois lançamentos.

Indique o valor de k tal que $P(X = k) = \frac{1}{9}$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

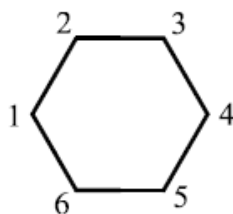
7. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro regular em que cada um dos seus vértices pertence a um dos eixos coordenados (dois vértices em cada eixo).

Escolhendo, ao acaso, três vértices desse octaedro, qual é a probabilidade de eles definirem um plano perpendicular ao eixo Oy ?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

Março de 2006

1. Três raparigas e os respectivos namorados posam para uma fotografia.
De quantas maneiras se podem dispor, lado a lado, de modo que cada par de namorados fique junto na fotografia?
- (A) 12 (B) 24 (C) 36 (D) 48
2. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas em 4 naipes (*Espadas, Copas, Ouros e Paus*). Em cada naipe há um Ás, três figuras (*Rei, Dama e Valete*) e mais nove cartas (*do Dois ao Dez*).
A Joana pretende fazer uma sequência com **seis** cartas do naipe de *Espadas*. Ela quer iniciar a sequência com o Ás, quer que as três cartas seguintes sejam figuras e quer concluir a sequência com duas das nove restantes cartas desse naipe.
Quantas sequências diferentes pode a Joana fazer?
- (A) 416 (B) 432 (C) 528 (D) 562
3. De uma certa linha do Triângulo de Pascal, sabe-se que a soma dos dois primeiros termos é 21.
Qual é o maior termo dessa linha?
- (A) 169 247 (B) 175 324 (C) 184 756 (D) 193 628
4. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 9$.
No gráfico desta função, considere os pontos cujas abcissas são -4 , -2 , 0 , 2 e 4 .
Escolhem-se, ao acaso, dois desses cinco pontos e desenha-se o segmento de recta que tem por extremidades esses dois pontos.
Qual é a probabilidade de esse segmento intersectar o eixo das abcissas?
- (A) 0,4 (B) 0,5 (C) 0,6 (D) 0,7
5. Na figura está representado um hexágono regular com os vértices numerados de 1 a 6.



Lança-se três vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.
Em cada lançamento, selecciona-se o vértice do hexágono que corresponde ao número saído nesse lançamento.

Note que, no final da experiência, podemos ter um, dois ou três pontos seleccionados (por exemplo: se sair o mesmo número três vezes, só é seleccionado um ponto).

Qual é a probabilidade de se seleccionarem três pontos que sejam os vértices de um triângulo equilátero?

- (A) $\frac{1}{18}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{14}$ (D) $\frac{1}{12}$

6. O João vai lançar seis mil vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e vai adicionar os números saídos.

De qual dos seguintes valores é de esperar que a soma obtida pelo João esteja mais próxima?

(A) 20 000 (B) 21 000 (C) 22 000 (D) 23 000

7. Admita que a variável *peso*, em quilogramas, das raparigas de 15 anos, de uma certa escola, é bem modelada por uma distribuição normal, de valor médio 40.

Sabe-se ainda que, nessa escola, 20% das raparigas de 15 anos pesam mais de 45 Kg.

Escolhida, ao acaso, uma rapariga de 15 anos dessa escola, qual é a probabilidade de o seu peso estar compreendido entre 35 Kg e 40 Kg ?

(A) 0,2 (B) 0,25 (C) 0,3 (D) 0,35

Dezembro de 2005

1. O número de telefone de um jornal local com o qual o grupo de professores de matemática colabora é 239 757611.

1.1. Quantos números existem que utilizam exactamente estes algarismos?

1.2. Se escolher um desses números ao acaso qual é a probabilidade de que ele comece por 23?

2. Justifica, utilizando processos exclusivamente analíticos, que a equação $(2x-1)^4 + 32x^3 + 8x = 1$ tem apenas uma solução real.

3. Considera as funções reais de variável real f e g definidas por $f(x) = 3^{x+1} - 2$ e $g(x) = \log_2(1 - 3x)$, respectivamente.

3.1. Determina, por processos exclusivamente analíticos, o conjunto solução de cada uma das seguintes condições:

3.1.1. $f(x) < 7$

3.1.2. $f(x) = g(-5)$

3.2. Caracteriza a função g^{-1} , inversa de g .

3.3. Utilizando a calculadora gráfica determina os pontos do gráfico de f que estão acima do gráfico de g .

4. A magnitude M de um sismo e a energia total E libertada por esse sismo estão relacionadas pela equação $\log_{10} E = 5,24 + 1,44.M$ (*a energia E é medida em joule*).

4.1. Um físico português estimou que o terramoto de Lisboa de 1755 teve magnitude 8,6.

Mostra que a energia total libertada nesse sismo foi aproximadamente $4,2 \times 10^{17}$ joule.

4.2. A ponte Vasco da Gama foi concebida para resistir a um sismo cuja energia total libertada seja cinco vezes a do terramoto de Lisboa de 1755. Qual será a magnitude de um tal sismo? Apresenta o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

5. A intensidade I , em decibéis, de um som audível, pode ser dada por:

$$I = 170 + 10 \log_{10} P, \text{ onde } P \text{ é o valor da potência, em certa unidade, do som emitido.}$$

5.1. Sabe-se que um som com intensidade superior ou igual a 100 decibéis é prejudicial à saúde. Conclui daí, a partir de que potência é que devem ser usados meios de protecção auditiva.

5.2. Dois sons de potências P e P_1 são emitidos por uma mesma fonte. Sabendo que a intensidade do primeiro é dupla da do segundo, mostra que $\frac{P}{(P_1)^2} = 10^{17}$.

5.3. Determina o valor de x tal que $I(xP) = I(P) + 30$

6. Sabendo que $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$ então $(\frac{1}{2})^2 > (\frac{1}{2})^3$. Na seguinte inequação $a > 1$.

$$\log_a \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 2 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{2}\right) > 3 \cdot \log_2 \left(\frac{1}{2}\right) \text{ então } 2 > 3.$$

Onde está o erro?

1. Uma caixa tem seis bolas: três bolas com o número 0 (zero), duas bolas com o número 1 (um) e uma bola com o número 2 (dois). Tiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa e observam-se os respectivos números.

1.1. Sejam A e B os acontecimentos:

A : «os números saídos são iguais»

B : «a soma dos números saídos é igual a 1»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$? Justifique a sua resposta.

1.2. Seja X a variável aleatória «**produto** dos números saídos».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X

Apresente cada uma das probabilidades na forma de fracção irredutível.

2. Uma professora de Matemática propôs o seguinte problema aos seus alunos:

Uma turma tem 25 alunos, dos quais 15 são rapazes e 10 são raparigas. Pretende-se formar uma comissão com dois alunos do mesmo sexo.

Quantas comissões diferentes se podem formar?

Apresentam-se, em seguida, as respostas da Rita e do André a este problema.

Resposta da Rita: ${}^{15}C_2 \times {}^{10}C_2$

Resposta do André: ${}^{25}C_2 - 15 \times 10$

Apenas uma das respostas está correcta.

Elabore uma composição na qual:

- identifique a resposta correcta;
- explique o raciocínio que conduz à resposta correcta;
- proponha uma alteração na expressão da resposta incorrecta, de modo a torná-la correcta;
- explique, no contexto do problema, a razão da alteração.

Março de 2010

4. Numa certa região, uma doença está a afectar gravemente os coelhos que lá vivem. Em consequência dessa doença, o número de coelhos existentes nessa região está a diminuir.

Admita que o número, em **milhares**, de coelhos que existem nessa região, t **semanas** após a doença ter sido detectada, é dado aproximadamente por

$$f(t) = \frac{k}{3 - 2e^{-0,13t}} \quad (k \text{ designa um número real positivo})$$

Resolva, **usando exclusivamente métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos; sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

- 4.1. Suponha que $k = 10$

Ao fim de quantos **dias**, após a doença ter sido detectada, é que o número de coelhos existentes na referida região é igual a 9 000 ?

- 4.2. Admita agora que o valor de k é desconhecido.

Sabe-se que, durante a primeira semana após a detecção da doença, morreram dois mil coelhos e não nasceu nenhum.

Determine o valor de k , arredondado às décimas.

Março de 2010

1. Na figura 2 está representado um prisma pentagonal regular. Quatro dos vértices desse prisma estão designados pelas letras A , B , E e O .

- 1.1. Pretende-se designar os **restantes seis** vértices do prisma, utilizando letras do alfabeto português (23 letras).

De quantas maneiras diferentes podemos designar esses seis vértices, de tal modo que os cinco vértices de uma das bases sejam designados pelas cinco vogais?

Nota: não se pode utilizar a mesma letra para designar vértices diferentes.

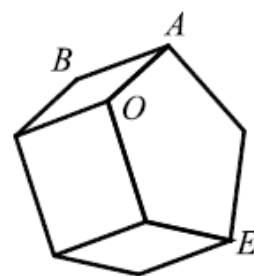


Figura 2

- 1.2. Ao escolhermos **três** vértices do prisma, pode acontecer que eles pertençam todos a uma mesma face. Por exemplo, os vértices A , B e O pertencem todos a uma mesma face, o mesmo acontecendo com os vértices A , E e O .

Escolhem-se aleatoriamente três dos dez vértices do prisma.

Qual é a probabilidade de esses três vértices pertencerem todos a uma mesma face?

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

- 1.3. Escolhe-se aleatoriamente um vértice **em cada base** do prisma.

Qual é a probabilidade de o segmento de recta definido por esses dois vértices ser diagonal de uma face?

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2. Lança-se um dado não equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Seja X a variável aleatória «número saído no lançamento efectuado».

Admita que, para certos números reais a e b , a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,2	a	0,2	b	0,1	0,15

- 2.1. Determine a e b , sabendo que o valor médio da variável aleatória X é 3,4

- 2.2. Em relação ao lançamento deste dado não equilibrado, sejam C e D os acontecimentos:

C : «Sair um número ímpar»

D : «Sair um número maior do que 4»

Averigúe se os acontecimentos C e D são independentes.

3.

- 3.1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(A) > 0$

Prove que:

$$P(A) \times [P(B|A) - 1] + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A})$$

Nota: $P(B|A)$ designa uma probabilidade condicionada.

- 3.2. Num encontro desportivo, participam atletas de vários países, entre os quais Portugal.

Metade dos atletas portugueses que participam no encontro são do sexo feminino.

Escolhido ao acaso um atleta participante no encontro, a probabilidade de ele ser estrangeiro ou do sexo masculino é 90%.

Participam no encontro duzentos atletas.

Quantos são os atletas portugueses?

Nota: se desejar, pode utilizar a igualdade do item 3.1. na resolução deste problema; nesse caso, comece por explicitar os acontecimentos A e B , no contexto do problema.

4. Um saco contém bolas azuis e bolas verdes, indistinguíveis ao tacto.

Redija, no contexto desta situação, o enunciado de um problema de cálculo de probabilidade, inventado por si, que admita como resposta correcta

$$\frac{{}^7C_4 \times 3 + {}^7C_5}{{}^{10}C_5}$$

No enunciado que apresentar, deve explicitar claramente:

- o número total de bolas existentes no saco;
- o número de bolas de cada cor existentes no saco;
- a experiência aleatória;
- o acontecimento cuja probabilidade pretende que seja calculada (e cujo valor terá de ser dado pela expressão apresentada).

Dezembro de 2009

1. Um saco contém onze bolas, numeradas de 1 a 11.

- 1.1. Ao acaso, tiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «o número da primeira bola retirada é par»

B : «o número da segunda bola retirada é par»

Indique o valor de $P(B|\overline{A})$, na forma de fracção irredutível, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada.

Justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P(B|\overline{A})$ no contexto da situação descrita.

- 1.2. Considere novamente o saco com a sua constituição inicial.

Ao acaso, extraem-se simultaneamente três bolas do saco e anotam-se os respectivos números.

Qual é a probabilidade de o produto desses números ser ímpar?

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

2. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_2 (x - 1) + \log_2 (13 - x) \leq 5$$

Apresente a sua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

3. Quando uma substância radioactiva se desintegra, a sua massa, medida em gramas, varia de acordo com uma função do tipo

$$m(t) = a e^{bt}, \quad t \geq 0,$$

em que a variável t designa o tempo, medido em milénios, decorrido desde um certo instante inicial. A constante real b depende da substância e a constante real a é a massa da substância no referido instante inicial.

Resolva as alíneas seguintes sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar cálculos numéricos.

- 3.1. O carbono-14 é uma substância radioactiva utilizada na datação de fósseis em que esteja presente.

Relativamente a um certo fóssil, sabe-se que:

- a massa de carbono-14 nele presente, mil anos depois de um certo instante inicial, era de 2,91 g
- a massa de carbono-14 nele presente, dois mil anos depois do mesmo instante inicial, era de 2,58 g

Tendo em conta estes dados, determine:

- o valor da constante b para o carbono-14;
- a massa de carbono-14 que existia no fóssil, no referido instante inicial.

Apresente os dois valores arredondados às centésimas.

Nota: se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 3.2. O rádio-226 é outra substância radioactiva.

Em relação ao rádio-226, sabe-se que $b = -0,43$

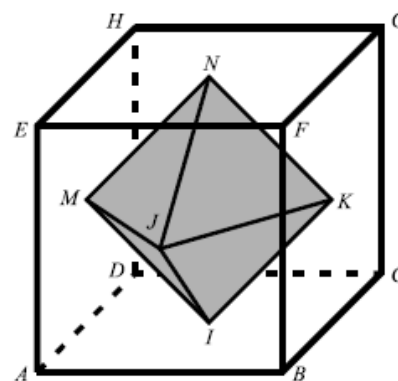
Verifique que, quaisquer que sejam os valores de a e de t , $\frac{m(t+1,6)}{m(t)}$ é constante.

Determine o valor dessa constante, arredondado às décimas, e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

Março de 2009

1. Na figura estão representados dois poliedros, o cubo $[ABCDEFGH]$ e o octaedro $[IJKLMN]$ (o vértice L do octaedro não está visível).

Cada vértice do octaedro pertence a uma face do cubo.



- 1.1. Considere todos os conjuntos que são constituídos por cinco dos catorze vértices dos dois poliedros (como, por exemplo, $\{A, B, C, K, L\}$).

1.1.1. Quantos desses conjuntos são constituídos por três vértices do cubo e dois vértices do octaedro?

1.1.2. Quantos desses conjuntos são constituídos por cinco vértices do mesmo poliedro?

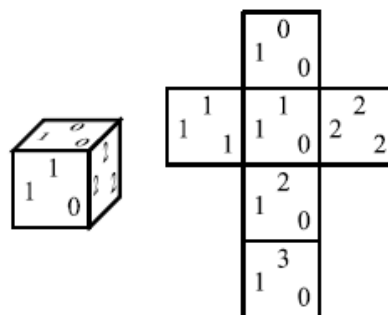
- 1.2. Escolhem-se ao acaso cinco dos catorze vértices dos dois poliedros.

Qual é a probabilidade de os cinco vértices escolhidos pertencerem todos à mesma face do cubo? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2. Na figura está representado um dado equilibrado, bem como a respectiva planificação.

Conforme se pode observar na figura, existem três números em cada face.

Lança-se este dado **uma só vez** e observam-se os números da face que fica voltada para cima. Diz-se então que saíram esses três números.



- 2.1. Seja X a variável aleatória «produto dos três números saídos».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X . Apresente as probabilidades na forma de fracção.

- 2.2. Seja R o acontecimento «os números saídos são todos iguais».

Seja S o acontecimento «a soma dos números saídos é igual a 3».

Os acontecimentos R e S são independentes? Justifique.

3.

3.1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$) de probabilidade não nula.

Considere que $\overline{B}$ designa o acontecimento contrário de B e que $P(A|B)$ e $P(B|A)$ designam probabilidades condicionadas.

Mostre que $P(A|B) - P(\overline{B}) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$

3.2. Relativamente a uma turma do 12º ano, sabe-se que:

- 60% dos alunos da turma praticam desporto;
- 40% dos alunos da turma são raparigas;
- metade dos praticantes de desporto são raparigas.

Escolhendo ao acaso um aluno da turma, qual é a probabilidade de ser praticante de desporto, sabendo que é uma rapariga?

Apresente o resultado na forma de percentagem.

Nota:

Se desejar, pode utilizar a fórmula da alínea anterior na resolução deste problema. Nesse caso, comece por explicitar o significado dos acontecimentos A e B , no contexto do problema.

Também pode resolver o problema através de um diagrama, de uma tabela, ou utilizando qualquer outro processo.

4. Um saco contém bolas brancas e bolas pretas, pelo menos uma de cada cor, num total de cinco.

Tiram-se, simultaneamente e ao acaso, três bolas do saco.

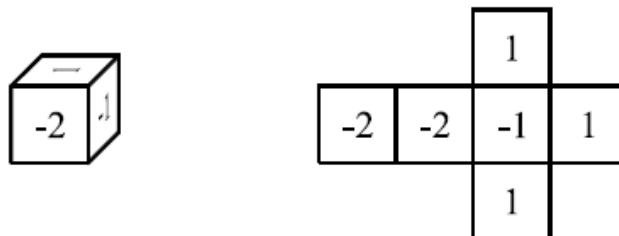
Seja X a variável aleatória «*número de bolas brancas retiradas*».

Sabendo que a variável X toma exclusivamente os valores 2 e 3, indique o número de bolas brancas e o número de bolas pretas que estão inicialmente no saco.

Numa pequena composição, explique o seu raciocínio.

Dezembro de 2008

1. Na figura está representado um dado equilibrado e a respectiva planificação.



Lança-se este dado uma única vez.

Seja X o número escrito na face que fica voltada para cima.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X e, seguidamente, determine, **sem recorrer à calculadora**, o valor médio desta variável.

Apresente o valor médio na forma de fracção irredutível.

2. Doze amigos vão passear, deslocando-se num automóvel e numa carrinha, ambos alugados. O automóvel dispõe de cinco lugares: o do condutor e mais quatro. A carrinha dispõe de sete lugares: o do condutor e mais seis. Apenas dois elementos do grupo, a Filipa e o Gonçalo, têm carta de condução, podendo qualquer um deles conduzir, quer o automóvel, quer a carrinha.

2.1. Os doze amigos têm de se separar em dois grupos, de modo a que um grupo viaje no automóvel e o outro na carrinha.

De quantas maneiras diferentes podem ficar constituídos os dois grupos de amigos?

2.2. Admita agora que os doze amigos já se encontram devidamente instalados nos dois veículos. O Gonçalo vai a conduzir a carrinha.

Numa operação STOP, a Brigada de Trânsito mandou parar cinco viaturas, entre as quais a carrinha conduzida pelo Gonçalo.

Se a Brigada de Trânsito escolher, ao acaso, dois dos cinco condutores para fazer o teste de alcoolémia, qual é a probabilidade de o Gonçalo ter de fazer o teste?

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), ambos com probabilidade não nula. Utilizando a fórmula da probabilidade condicionada e as propriedades das operações com conjuntos, prove que

$$P\left(\left(\overline{A \cap B}\right) \mid B\right) = P(A|B)$$

4. Admita que uma certa população de seres vivos evolui de acordo com a seguinte lei: o número de indivíduos da população, t dias após um certo instante inicial, é dado aproximadamente por

$$P(t) = a e^{kt} \quad (t \in \mathbb{R}_0^+)$$

em que

- a é o número de indivíduos da população no instante inicial ($a > 0$)
- k é uma constante real

- 4.1. Seja r um número real positivo.

Considere que, ao fim de n dias, contados a partir do instante inicial, o número de indivíduos da população é igual a r vezes o número de indivíduos que existiam no referido instante inicial.

Mostre que se tem $k = \frac{\ln(r)}{n}$ ($\ln$ designa logaritmo de base e)

- 4.2.** Admita que, às zero horas do dia 1 do corrente mês, se iniciou, em laboratório, uma cultura de bactérias, em pequena escala, na qual se juntaram
- 500 indivíduos de uma estirpe A
 - 500 indivíduos de uma estirpe B
- Nunca foram introduzidos mais indivíduos destas duas estirpes nesta cultura.

As condições da cultura são desfavoráveis para a estirpe A , mas são favoráveis para a estirpe B . De facto,

- decorrido exactamente um dia, a estirpe A estava reduzida a 250 indivíduos
- decorridos exactamente seis dias, a estirpe B tinha alcançado 1000 indivíduos

- 4.2.1.** Quer a estirpe A , quer a estirpe B , evoluíram de acordo com a lei acima referida. No entanto, o valor da constante k para a estirpe A é diferente do valor dessa constante para a estirpe B .

Utilizando a igualdade da alínea 4.1, verifique que:

- no caso da estirpe A , o valor da constante k , com quatro casas decimais, é $k_A = -0,6931$
- no caso da estirpe B , o valor da constante k , com quatro casas decimais, é $k_B = 0,1155$

- 4.2.2.** Durante a primeira semana, houve um momento em que o número total de indivíduos destas duas estirpes, existentes na cultura, atingiu o valor mínimo. Utilizando os valores k_A e k_B referidos na alínea anterior e recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o dia e a hora em que tal aconteceu (hora arredondada às unidades).

Apresente, na sua resposta:

- a expressão da função que dá o número total de indivíduos destas duas estirpes, existentes na cultura, em função do tempo;
- o gráfico dessa função, para $t \in [0, 7]$, no qual deve estar devidamente assinalado o ponto necessário à resolução do problema;
- a coordenada relevante desse ponto, arredondada às milésimas.

Janeiro de 2008

- 2.** A acidez de uma solução é medida pelo valor do seu pH , que é dado por

$$pH = -\log_{10}(x)$$

onde x designa a concentração de iões H_3O^+ , medida em mol/dm^3 .

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

- 2.1.** Admita que o pH do sangue arterial humano é 7,4.

Qual é a concentração (em mol/dm^3) de iões H_3O^+ , no sangue arterial humano?

Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma $a \times 10^b$, com b inteiro e a entre 1 e 10. Apresente o valor de a arredondado às unidades.

- 2.2.** A concentração de iões H_3O^+ no café é tripla da concentração de iões H_3O^+ no leite.

Qual é a diferença entre o pH do leite e o pH do café? Apresente o resultado arredondado às décimas.

Sugestão: comece por designar por l a concentração de iões H_3O^+ no leite e por exprimir, em função de l , a concentração de iões H_3O^+ no café.

3. Considere, num referencial o. n. xOy ,
- a curva C , que representa graficamente a função f , de domínio $[0, 1]$, definida por $f(x) = e^x + 3x$
 - a recta r , de equação $y = 5$

3.1. Sem recorrer à calculadora, justifique que a recta r intersecta a curva C em pelo menos um ponto.

3.2. Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, visualize a curva C e a recta r , na janela $[0, 1] \times [0, 7]$ (janela em que $x \in [0, 1]$ e $y \in [0, 7]$).

Reproduza, na sua folha de teste, o referencial, a curva C e a recta r , visualizados na calculadora.

Assinale ainda os pontos O , P e Q , em que:

- O é a origem do referencial;
- P é o ponto de coordenadas $(0, e)$;
- Q é o ponto de intersecção da curva C com a recta r ; relativamente a este ponto, indique, com duas casas decimais, a sua abcissa, que deve determinar com recurso à calculadora.

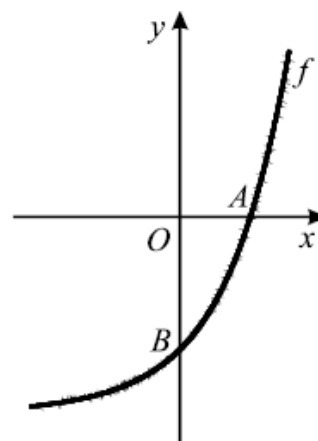
Desenhe o triângulo $[OPQ]$ e determine a sua área. Apresente o resultado final arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4. Seja c um número real maior do que 1.

Na figura está representada uma parte do gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x - c$.

Tal como a figura sugere

- A é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox
- B é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Oy



Mostre que:

Se o declive da recta AB é $c - 1$, então $c = e$

Março de 2007

1. Um estudo de mercado, encomendado por uma empresa de venda de produtos alimentares, concluiu que a quantidade de azeite *Azeitona do Campo*, vendida num mês por essa empresa, depende do preço de venda ao público, de acordo com a função

$$V(x) = e^{14-x} \quad (x > 0)$$

sendo x o preço de venda ao público, em euros, de 1 litro desse azeite e $V(x)$ a quantidade vendida num mês (medida em litros).

- 1.1. A empresa tem um conjunto de despesas (compra ao produtor, empacotamento, publicidade, transportes, etc.) com a compra e a venda do azeite. Sabendo que cada litro de azeite vendido acarreta à empresa uma despesa total de 3 euros, **justifique** que o lucro mensal da empresa (em euros), resultante da venda do azeite, é dado por

$$L(x) = (x - 3)e^{14-x}$$

- 1.2. Utilize a calculadora para resolver **graficamente** o seguinte problema:

Entre que valores deve variar o preço de venda ao público de um litro de azeite para que o lucro mensal seja superior a dezasseis mil e quinhentos euros? Apresente os valores em euros, arredondados aos centimos (de euro).

Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

2. Considere a função f , de domínio $]0, +\infty[$, definida por $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

2.1. Mostre que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(4e^2\right)$

3. Com o objectivo de estudar as leis do aquecimento e do arrefecimento, realizou-se, num laboratório de Física, a seguinte experiência: aqueceu-se ao lume uma certa quantidade de água, durante cinco minutos; passado este tempo, apagou-se o lume e deixou-se a água a arrefecer. A temperatura da água foi sendo medida, ao longo do decorrer da experiência.

Admita que:

- neste laboratório, a temperatura ambiente é constante;
- a temperatura da água, no instante em que começou a ser aquecida, era igual à temperatura ambiente;
- depois de se ter apagado o lume, a temperatura da água tende, com o passar do tempo, a igualar a temperatura ambiente.

Em resultado da experiência, concluiu-se que a relação entre a temperatura da água e o tempo t , contado em minutos, a partir do instante em que se colocou a água ao lume, é modelada por uma, e uma só, das quatro funções, a , b , c e d , definidas a seguir:

$$a(t) = \begin{cases} 24 - 2t & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 24 - 10e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

$$b(t) = \begin{cases} 12(t + 2) & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 24 + 70e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

$$c(t) = \begin{cases} 14(t + 1) & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 24 + 60e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

$$d(t) = \begin{cases} 12(t + 2) & \text{se } 0 \leq t \leq 5 \\ 24 + 60e^{-0,04(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

Qual das quatro funções é a correcta?

Numa pequena composição, explique porque não pode ser nenhuma das outras três, indicando, para cada uma delas, uma razão pela qual a rejeita, explicando a sua inadequação, relativamente à situação descrita.

1. Seja C o conjunto de todos os números naturais com três algarismos (ou seja, de todos os números naturais de 100 a 999).

1.1. Quantos elementos do conjunto C são múltiplos de 5?

1.2. Quantos elementos do conjunto C têm os algarismos todos diferentes?

2.

2.1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(A) > 0$.

Sejam $\bar{A}$ e $\bar{B}$ os acontecimentos contrários de A e de B , respectivamente.

Seja $P(B|A)$ a probabilidade de B , se A .

Mostre que:
$$\frac{P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(A)} = 1 - P(B|A)$$

2.2. Próximo de uma praia portuguesa, realiza-se um acampamento internacional de juventude, no qual participam jovens de ambos os sexos.

Sabe-se que:

- a quarta parte dos jovens são portugueses, sendo os restantes estrangeiros;
- 52% dos jovens participantes no acampamento são do sexo feminino;
- considerando apenas os participantes portugueses, 3 em cada 5 são rapazes.

No último dia, a organização vai sortear um prémio, entre todos os jovens participantes no acampamento.

Qual é a probabilidade de o prémio sair a uma rapariga estrangeira? Apresente o resultado na forma de percentagem.

Nota: se o desejar, pode utilizar a igualdade da alínea anterior (nesse caso, comece por identificar claramente, no contexto do problema, os acontecimentos A e B); no entanto, pode optar por resolver o problema por outro processo (como, por exemplo, através de uma tabela de dupla entrada ou de um diagrama em árvore).

3. Uma caixa, que designamos por caixa 1, contém duas bolas pretas e três bolas verdes. Uma segunda caixa, que designamos por caixa 2, contém duas bolas pretas e uma bola verde.

3.1. Considere a seguinte experiência: retirar, ao acaso, uma bola de cada caixa.

Seja X a variável aleatória «*número de bolas verdes que existem no conjunto das duas bolas retiradas*».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X , apresentando as probabilidades na forma de fracção irredutível.

3.2. Considere agora que, tendo as duas caixas a sua constituição inicial, se realiza a seguinte experiência:

- ao acaso, retiram-se simultaneamente três bolas da caixa 1 e colocam-se na caixa 2;
- em seguida, novamente ao acaso, retiram-se simultaneamente duas bolas da caixa 2.

Sejam os acontecimentos:

A : «as três bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor»;

B : «as duas bolas retiradas da caixa 2 são de cores diferentes».

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de $P(B|A)$, apresentando o seu valor na forma de fracção irredutível. Numa pequena composição, explique o raciocínio que efectuou. O valor pedido deverá resultar da interpretação do significado de $P(B|A)$, no contexto do problema, significado esse que deverá começar por explicar.

- 3.3.** Considere agora que, na caixa 2, tomando como ponto de partida a sua constituição inicial, se colocam mais n bolas, todas amarelas. Esta caixa fica, assim, com duas bolas pretas, uma bola verde e n bolas amarelas.

Considere a seguinte experiência: ao acaso, retiram-se simultaneamente duas bolas dessa caixa.

Sabendo que a probabilidade de uma delas ser amarela e a outra ser verde é $\frac{5}{39}$, determine o valor de n .

Dezembro de 2005