Ficha de Trabalho

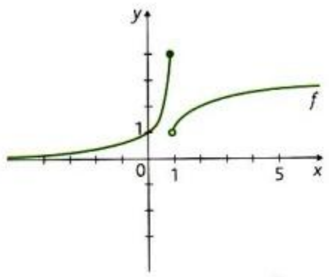
- Limite de função segundo Heine
- Propriedades operatórias sobre limites
- Indeterminações
- Continuidade
- Teorema de Bolzano – Cauchy
- Assimptotas

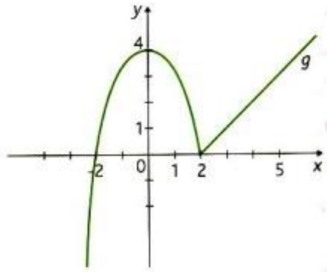
Parte II

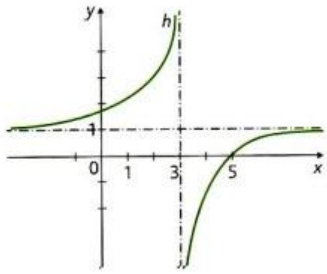
Questões de resposta aberta

Indique todos os cálculos que efectuar. Explique os raciocínios e justifique as conclusões.

1. Considere as representações gráficas das funções f, g e h:







Indique caso existam, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

g) $\lim\limits_{x\to2} g(x)$

h) $\lim\limits_{x\to0} g(x)$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$

k) $\lim\limits_{x\to3} h(x)$

l) $\lim\limits_{x\to5} h(x)$

2. Sejam f, g e h funções reais de variável real, tais que:

$\lim\limits_{x\to2} f(x)=5\,;\ \lim\limits_{x\to2} g(x)=0\,;\ \lim\limits_{x\to2} h(x)=+\infty$

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to2} (f+g)(x)$

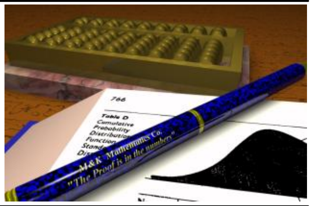
b) $\lim\limits_{x\to2} (f.g)(x)$

c) $\lim\limits_{x\to2} (f+h)(x)$

d) $\lim\limits_{x\to2} (f.h)(x)$

e) $\lim\limits_{x\to2} (\frac{f}{g})(x)$

f) $\lim\limits_{x\to2} (\frac{h}{f})(x)$



Ficha de Trabalho

- Limite de função segundo Heine
- Propriedades operatórias sobre limites
- Indeterminações
- Continuidade
- Teorema de Bolzano – Cauchy
- Assimptotas

3. Calcule, se existirem os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} (x+1)$

b) $\lim\limits_{x\to 1} (2x-8)$

c) $\lim\limits_{x\to -1} (2x+4)^3$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \left(\dfrac{x^2+4x}{x^2-4}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{x+1}{x+4}}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+3}{(x-1)^2}$

4. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^5-3x+2)$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} (4x^5-3x-x^6)$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (9x-42x^2-2x^3)$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x-3}-\sqrt{x})$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{7+3x}}{2}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{3+7x}{2-x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{2x^2+5x}{x^2+3x+2}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^2}{x^3+9}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{4-2x}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3+x^2-5x+3}\right)$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\sqrt{x}}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^3-x^2}\right)$

5. Considere a função, real de variável real, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} e^{x+1} & \text{se } x<0 \\ 8 & \text{se } x=0 \\ \ln(x+e) & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

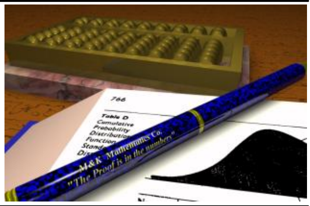
b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

6. Calcule o limite das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-1} & \text{se } x>1 \\ 4x^2+1 & \text{se } x\le 1 \end{cases}$, em x = 1



b) $g(x)=\begin{cases} x+4 & \text{se } x\geq 2 \\ \dfrac{x+1}{2x-1} & \text{se } 0<x<2 \wedge x\neq \dfrac{1}{2} \\ x^2-1 & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$, em x = 0 e x = 2

c) $h(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+3} & \text{se } x\geq 4 \\ \dfrac{x-3}{x-4} & \text{se } x<4 \end{cases}$, em x = 4

d) $i(x)=\begin{cases} e^x+1 & \text{se } x\leq 0 \\ \ln(x+1) & \text{se } x>0 \end{cases}$, em x = 0

7. Estude, quanto à continuidade, as seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-3} & \text{se } x>3 \\ \dfrac{x^2}{5-x} & \text{se } x\leq 3 \end{cases}$, em x = 3

b) $g(x)=\begin{cases} e^x+1 & \text{se } x>0 \\ x+2 & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$, em x = 0

c) $h(x)=\begin{cases} \log_5(x-4) & \text{se } x\geq 5 \\ x^2-25 & \text{se } -5\leq x<5 \\ k+x & \text{se } x<-5 \end{cases}$, em x = 5

8. Determine k, de modo a que as funções sejam contínuas nos pontos indicados:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+k & \text{se } x\leq 3 \\ \dfrac{x^3-4x^2+x+6}{x^2+3x+2} & \text{se } x>3 \end{cases}$, em x = 3

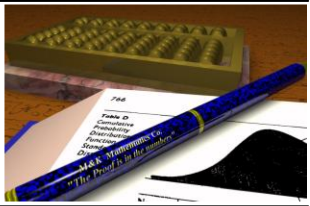
b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{2x-2} & \text{se } x>1 \\ \dfrac{1}{2}k & \text{se } x=1 \\ (kx)^2-kx+\dfrac{1}{2} & \text{se } x<1 \end{cases}$, em x = 1

c) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+8x^3}{x} & \text{se } x\leq 0 \\ k+x & \text{se } x>0 \end{cases}$, em x = 0

9. Prove que a equação $2\ln((x^2+3)-x-3=0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[-1,0]$.

10. Considere a função, real de variável real, definida por $f(x)=e^{x+3}-3x$. Prove que f(x) = 30 tem pelo menos uma solução no intervalo $[0,1]$.

Ficha de Trabalho



- Limite de função segundo Heine
- Propriedades operatórias sobre limites
- Indeterminações
- Continuidade
- Teorema de Bolzano – Cauchy
- Assimptotas

11. Prove que a função definida por $f(x)=x^4+4x^3-3x^2+5$ tem pelo menos um zero real.

12. Considere a função, real de variável real, definida por:

$$g(x)=\begin{cases} x^6-4x+1 & \text{se } x\leq 1 \\ -\dfrac{4}{x+1} & \text{se } x>1 \end{cases}$$

a) Estude g quanto à continuidade no seu domínio.

b) Prove que a função g tem pelo menos um zero no intervalo $[0,4]$.

13. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e estritamente decrescente, tal que f(2) > 0 e f(2) = -4.

Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

A) A equação f(x) = 0 tem apenas uma solução no intervalo $[2,3]$

B) A equação f(x) = 0 tem pelo menos uma solução no intervalo $[2,3]$

C) A equação f(x) = 1 tem apenas uma solução no intervalo $[2,3]$

14. Estude as seguintes funções quanto à existência de assimptotas do seu gráfico:

a) $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x-1}$

b) $g(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

c) $h(x)=\dfrac{e^x+1}{x}$

d) $i(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$,

e) $j(x)=\ln(x^2-x)$

f) $l(x)=\dfrac{x^2}{e^x-1}$

15. Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x^2+7x-12}{2x^2-5x-3} & \text{se } x>3 \\ -2 & \text{se } x=3 \\ 2x-k & \text{se } x<3 \end{cases} \quad ; \; m(x)=x^2-x; \; g(x)=2-\sqrt{x+3}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Determine k de forma que exista $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

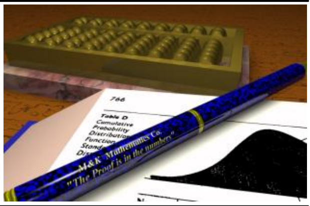
c) Mostre que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{m(1+h)-m(1)}{h}=1$

d) Calcule $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g}{m}(x)$

16. Considere a função t, definida em $\mathbb{R}$, por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1}+3-x & \text{se } x\neq -1 \\ 5 & \text{se } x=-1 \end{cases}$

Mostre que a função é contínua à direita de -1.

Ficha de Trabalho



- Limite de função segundo Heine
- Propriedades operatórias sobre limites
- Indeterminações
- Continuidade
- Teorema de Bolzano – Cauchy
- Assimptotas

17. Para cada valor do parâmetro real m, a expressão

$$g(x)=\begin{cases} x^2-mx+m-1 & \text{se } x\geq 0 \\ x^4+x^2 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Representa uma função real de variável real.

a) Determina m de modo que g seja contínua em $\mathbb{R}$.

b) Determine m de modo que $g(x)\geq 0,\ \forall x\in \mathbb{R}$.

c) Calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$.

18. Seja f a função real de variável real definida por $f(x)=-2x^4+6x^2+5$.

a) Justifica que:

i. f é uma função par.

ii. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$.

b) Sem efectuar cálculos, conclua que:

i. A função tem um outro zero.

ii. O contradomínio da função não é $\mathbb{R}$.

19. Seja f a função real de variável real definida por $f(x)=\begin{cases} -3+x^2 & \text{se } x>0 \\ \dfrac{3x+1}{x-1} & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$

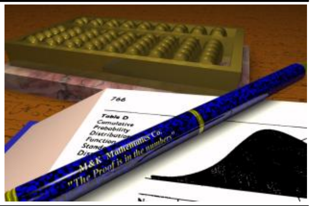
a) Justifique que f(-1)xf(1) < 0.

b) Pode aplicar-se o Teorema de Bolzano à função f no intervalo $[-1,1]$? Justifique.

c) A função anula-se? Justifique.

20. Determine os valores reais de a e b de modo a que y = 2x+b seja uma equação da assimptota do gráfico da função f definida por $f(x)=\dfrac{ax^4-3x}{x^3-5}$

Ficha de Trabalho



- Limite de função segundo Heine
- Propriedades operatórias sobre limites
- Indeterminações
- Continuidade
- Teorema de Bolzano – Cauchy
- Assimptotas

SOLUÇÕES

Parte I

Escolha Múltipla

1. D	**3.** D	**5.** B	**7.** C	**9.** D	**11.** A	**13.** A
2. D	**4.** C	**6.** C	**8.** B	**10.** D	**12.** A	**14.** B

Parte II

Questões de resposta aberta

1

a) $+\infty$

b) 0

c) 1

d) 4

e) $+\infty$

f) $-\infty$

g) 0

h) 4

i) 1

j) 1

2

a) 5

b) 0

c) $+\infty$

d) $+\infty$

e) Não existe

f) $+\infty$

3

a) 3

b) -6

c) 8

d) $-\infty$

e) $+\infty$

f) $\frac{1}{2}$

g) $+\infty$

4

a) $+\infty$

b) $-\infty$

c) $+\infty$

d) 0

e) 0

f) -7

g) 2

h) 0

i) $-\infty$

j) 4

k) $+\infty$

l) 0

m) $+\infty$

5

a) 0

b) $+\infty$

c) Não existe

d) 1

6

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 5$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = 6$

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x\to -4^+} h(x) = \sqrt{19}$

$\lim\limits_{x\to -4^-} h(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} i(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} i(x) = 2$

Ficha de Trabalho

- Limite de função segundo Heine
- Propriedades operatórias sobre limites
- Indeterminações
- Continuidade
- Teorema de Bolzano – Cauchy
- Assimptotas

7a) f não é contínua em x=3 pq os limites laterais são diferentes

b) $\lim_{x\to 0^+} g(x)=2$; $\lim_{x\to 0^-} g(x)=2$ e g(0)=2

c) $\lim_{x\to 5^+} h(x)=0$; $\lim_{x\to 5^-} h(x)=0$; h(5)=0

8

a) k = -9

b) k = 1

c) k = 0

14

a) A.V.: $x=\frac{1}{3}$; A.H.: $y=\frac{2}{3}$

b) A.V.: $x=-1$; A.O.: $y=x$

c) A.V.: $x=0$; A.H.: $y=0$

d) A.V.: $x=0$; A.H.: $y=0$

e) A.V.: x = 0 ; x = 1

f) A.H.: $y=0$

12a) g é contínua em $]-\infty;1[$ porque é uma função polinomial; g é contínua em $]1;+\infty[$ porque é uma função racional. g é contínua em x=1 porque $\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)=-2$. Logo g é contínua em IR.

g(0)=1; $g(4)=-\frac{4}{5}$; g é contínua em $[0;4]$; g(0).g(4)<0; então $\exists x \in]0;4[: g(x)=0$

13

A) Verdadeira

B) Verdadeira

c) Falsa

15

a) $-\frac{1}{2}$

b) $k=\frac{41}{7}$

d) $-\frac{1}{4}$

17

a) 1

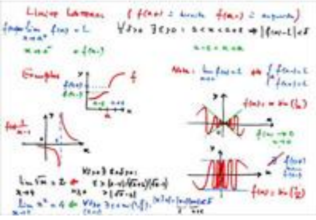
b) 2

c) $+\infty$

19b) Não, porque a função não é contínua em x = 0

20

a = 2 e b = 0



Ficha de Trabalho

- Continuidade de funções racionais
- Assímptotas de funções racionais

1. Seja g a função real de variável real, definida por

$$g(x)=\begin{cases} x^2+1 \text{ se } x\geq -3 \\ 1-3x \text{ se } x<-3 \end{cases}$$

Estude a sua continuidade no ponto x= -3.

2. Considere as funções f e g, definidas da seguinte forma:

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 \text{ se } x>0 \\ x^2+1 \text{ se } x\leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x)=\begin{cases} 2-5x \text{ se } x>0 \\ x-x^2 \text{ se } x\leq 0 \end{cases}$$

Estude a sua continuidade em x=0.

3. Estude a continuidade de $h(x)=\begin{cases} 2-3x \text{ se } x>1 \\ -1 \quad \text{se } x=1 \\ x^3-2x \text{ se } x<1 \end{cases}$ no ponto x=1.

4. Mostre que a função $s(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{|x+1|} \text{ se } x\neq -1 \\ 0 \text{ se } x=-1 \end{cases}$, não é contínua em x= -1.

5. Averigue se a função real de variável real, definida por $g(x)=|x-3|+x$ é continua em x=3.

6. Estude a continuidade da função $f(x)=\begin{cases} x^2-2x \text{ se } x>-1 \\ -2 \quad \text{se } x=-1 \\ 2-x \text{ se } x<-1 \end{cases}$, no intervalo $[-3,2]$.

7. Seja h a função real de variável real definida por $h(x)=\begin{cases} |x-4| \text{ se } x>2 \\ 3 \text{ se } x\leq 2 \end{cases}$

Estude a continuidade da função h no ponto x=2.

8. O quadro representa a variação da função k, contínua, definida no intervalo $[-4,6]$

x	-4		-3		-1		0		1		6
$k(x)$	$+3$	↘	-5	↗	-1	↗	2	↘	-3	↗	4

Indique, justificando, se são verdadeiras as afirmações:

8.1. $k(x)\times k(x)<0,\ \forall x\in D_k$

8.2. A função tem um único zero no intervalo $]-4,-3[$

8.3. No intervalo $[-3,-1]$, a equação k(x)=0 é impossível

8.4. No intervalo $]-1,0[$, a equação k(x)=1 é possível

8.5. A função tem apenas quatro zeros no intervalo $]-4,6[$

8.6. O contradomínio de k é $[-3,4]$

9. Averigue se as funções dadas admitem assímptotas horizontais ou verticais e, em caso afirmativo, escreva as suas equações.

9.1. $f(x)=\dfrac{2x^2+2x-4}{x+3}$

9.2. $g(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+4}$

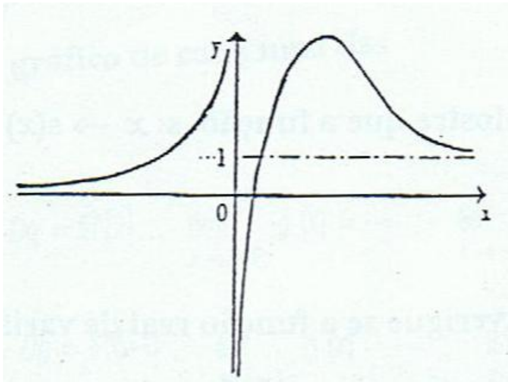
9.3. $h(x)=\dfrac{|x-4|}{x}$

10. Determine, se existirem, as assímptotas não verticais da função $f(x)=\dfrac{2x^3+x+4}{3x^2-5x+2}$.

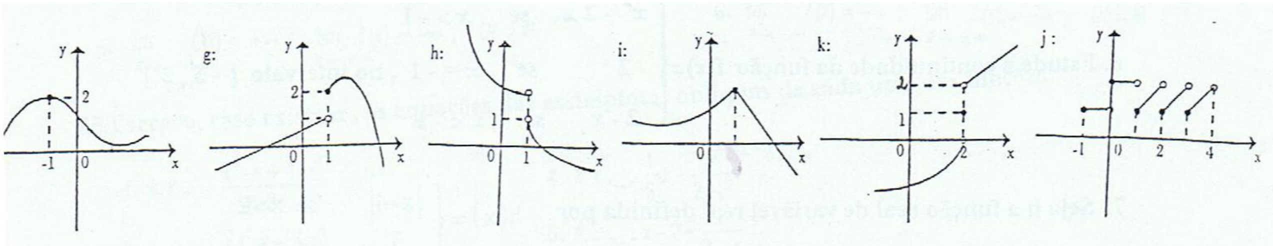
11. Elabore o esboço de um gráfico que verifique as condições dadas:

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-3$; $\lim\limits_{x\to4^+} h(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to4^-} h(x)=-2$; $D_h=\mathbb{R}\setminus\{4\}$

12. Observe o esboço do gráfico da função f, real de variável real. Escreva as equações das assímptotas do gráfico da função.



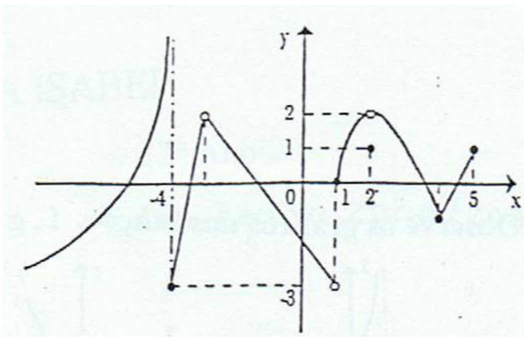
13. Observe os gráficos de seis funções reais de variável real:



13.1. Indique uma função continua no seu domínio.

13.2. Indique, justificando, os valores de x onde cada uma das funções é descontínua.

14. Na figura está representado o esboço do gráfico de uma função f real de variável real. Indique, justificando, os valores de x para os quais a função é descontínua.



15. Considere a função g, assim definida:

$$g(x)=\begin{cases}2-x^2 & \text{se } x<0\\ 3k & \text{se } x=0\\ x+2 & \text{se } x>0\end{cases}$$

Determine $k\in\mathbb{R}$, de modo que g seja contínua no ponto de abcissa zero.

16. Dada a função $h(x)=x^3+6x^2-4$

16.1. Calcule h(0), h(2) e h(3).

16.2. Mostre que h se anula pelo menos uma vez, em $]0,2[$.

16.3. Prove que a função h, toma o valor 5 no intervalo $]1,3[$.

17. Considere a função f, real de variável real, assim definida: $f(x) = x^3 - 8$.

17.1. Prove que a função é contínua em IR.

17.2. Justifique que f é injectiva.

17.3. Calcule f(1) e f(3).

17.4. Justifique a afirmação: “a equação $x^3 - 8 = 0$ tem uma única solução no intervalo $]1,3[$”.

18. Considere a função $h(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

18.1. Verifique que h(0) e h(4) têm sinais contrários.

18.2. “A equação h(x)=0 não tem nenhuma solução entre 0 e 4, pois a única solução é -1”. Justifique porque razão a afirmação não contradiz o teorema de Bolzano?

19. Averigue se as funções dadas admitem assímptotas verticais e, em caso afirmativo, escreva as suas equações:

19.1. $f(x) = \frac{x+1}{x}$

19.2. $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$

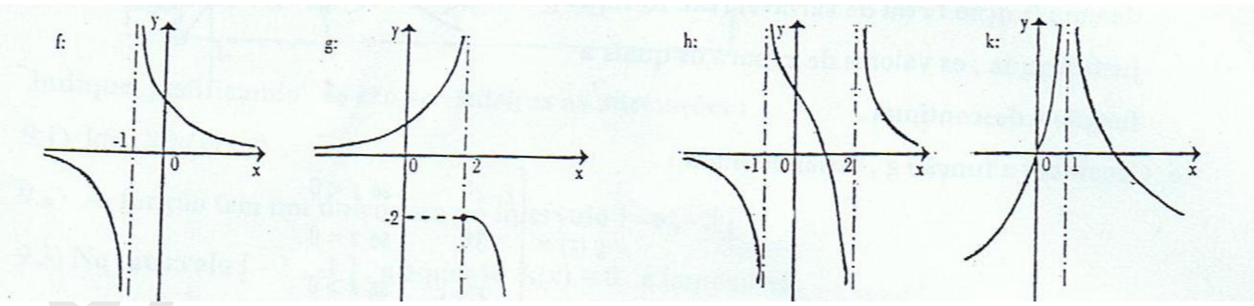
19.3. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2}$

19.4. $f(x) = \frac{x-3}{x^2+x-2}$

19.5. $f(x) = \frac{4}{x+2} + \frac{3}{x}$

19.6. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x+1}$

20. Observa os gráficos das funções f, g, h e k.



20.1. Indique: $\lim_{x \to -1^+} f(x)$; $\lim_{x \to 2^+} g(x)$; $\lim_{x \to 1^+} k(x)$; $\lim_{x \to 2^+} h(x)$

20.2. Indique, caso existam, as equações das assímptotas das funções dadas.

21. Mostre que os gráficos das funções dadas admitem assímptotas horizontais.

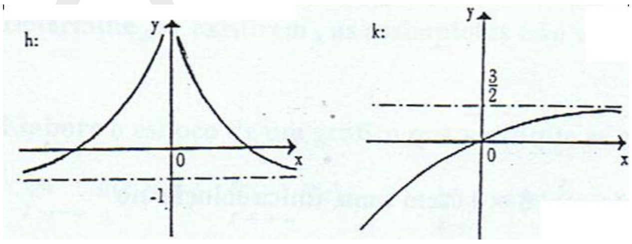
21.1. $g(x) = \frac{2}{x+1}$

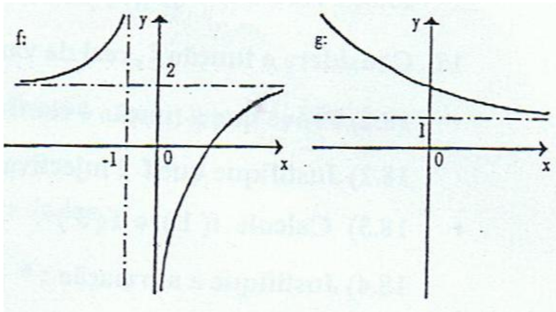
21.2. $g(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-2}$

21.3. $g(x) = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x}$

21.4. $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$

22. Observa os gráficos das funções f, g, h e k.





22.1. Indique: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$

22.2. Escreva as equações das assímptotas horizontais do gráfico de cada uma delas.

23. Esboce o gráfico de uma função g, sabendo que:

23.1. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; $\lim\limits_{x\to-3^-} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-3^+} g(x) = -\infty$

23.2. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $\lim\limits_{x\to2^-} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+} g(x) = -\infty$

23.3. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; $\lim\limits_{x\to-3} g(x) = +\infty$;

23.4. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = +\infty$

23.5. $D_g = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

23.6. $D_g = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

24. Escreva, caso existam, as equações das assímptotas oblíquas de cada uma das funções:

24.1. $k(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 2}$

24.2. $k(x) = \dfrac{2x^3 + 3x - 3}{x^2 + 1}$

24.3. $k(x) = 3x + 2 + \dfrac{2}{x - 1}$

24.4. $k(x) = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{x}{2 - x^2}$

24.5. $k(x) = x - 2 - \dfrac{x}{3 - x}$

Soluções:

1. Contínua
2. f não é contínua para x=0 mas é contínua à esquerda de zero.

   g não é contínua para x=0 mas é contínua à esquerda de zero.
3. Contínua
4. Não é contínua porque os limites laterais são diferentes. À esquerda dá $+\infty$ e à direita $-\infty$.
5. É contínua
6. A função é contínua em $[-3;2]\setminus\{-1\}$ por se tratarem de funções polinomiais. Em x=-1 não é contínua porque $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 3 \neq f(-1)$
7. Descontínua em x=2 embora contínua à esquerda de 2.
8. D

8.1 Falso. Um nº ao quadrado é sempre positivo ou nulo.

8.2 Verdade. Pelo teorema de Bolzano a função tem pelo menos um zero nesse intervalo, mas como a função é decrescente passa a ter somente um zero.

8.3 Verdadeiro

8.4 Verdade pelo teorema de Bolzano

8.5 Verdade

8.6 Falso. CD=[-5;4]

9.1 x=-3 assímptota vertical

Não tem assímptotas horizontais

9.2 D=IR logo como a função é contínua no seu domínio não tem assímptotas verticais.

y=1 é assímptota horizontal

9.3 x=0 A.V.y=1; y=-1 são assímptotas horizontais

10. $y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{9}$

12. x=0; y=1; y=0

13.1 f(x) e i(x)

13.2 g(x) x=1 pq tem os limites laterais diferentes

h(x) x=1 pq tem os limites laterais diferentes

k(x) x=2 pq tem os limites laterais diferentes

j(x) é descontínua em x=0; x=1; x=2; x=3

14. Descontínua em: x=-4 por ter limites laterais diferentes

x=-3 porque -3 não pertence ao domínio

x=1 por ter limites laterais diferentes

x=2 porque $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

15. $k = \frac{2}{3}$

16.1 h(0)=-4; h(2)=28; h(3)=77

16.2 Pelo corolário do teorema de Bolzano, pelo facto de em 0 e em 2, a função ter imagens com sinais diferentes.

16.3 Pelo teorema de Bolzano, a função tem que percorrer todos os valores intermédio entre 3 e 77, incluindo o 5.

17.1 É contínua em IR por ser polinomial, que é sempre contínua em IR.

17.3 f(1)= -7; f(3)=19

17.4 Verdade porque: Como a função é contínua posso aplicar o Teorema de Bolzano. Como f(1)xf(3)<0 então pelo corolário a função tem pelo menos um zero. Garante-se só um porque a função é injectiva.

18.1 $h(0) = -\frac{1}{2}$; $h(4) = \frac{5}{2}$

18.2 Não contradiz porque nem sequer posso utilizar o teorema de Bolzano porque a função não é contínua em [0;4].

19.1 x=0 19.2 Não tem 19.3 $x = \sqrt{2}$; $x = -\sqrt{2}$ 19.4 x=-2; x=1

19.5 x=-2; x=0 19.6 x=-1

20.1 $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = -2$; $\lim\limits_{x\to 1^+} k(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = +\infty$

20.2	f(x)	x=-1; y=0
	g(x)	x=2; y=0
	h(x)	x=-1; x=2; y=0
	k(x)	x=1

21.1 y=0

21.2 y=1

21.3 y=0

21.4 y=1; y=-1

22.1 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to +\infty} k(x) = \frac{3}{2}$

22.2	h(x)	y=-1
	k(x)	$y = \frac{3}{2}$
	f(x)	y=2
	g(x)	y=1

24.1 y=x+1

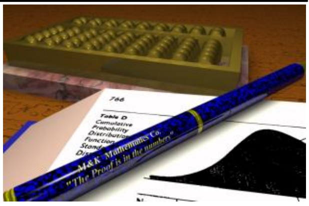
24.2 y=2x

24.3 y=3x+2

24.4 $y = \frac{1}{3}x$

24.5 y=x-2

Ficha de Trabalho



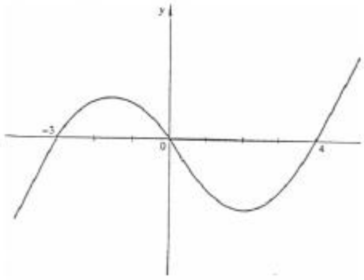
- Cálculo Diferencial

Parte I

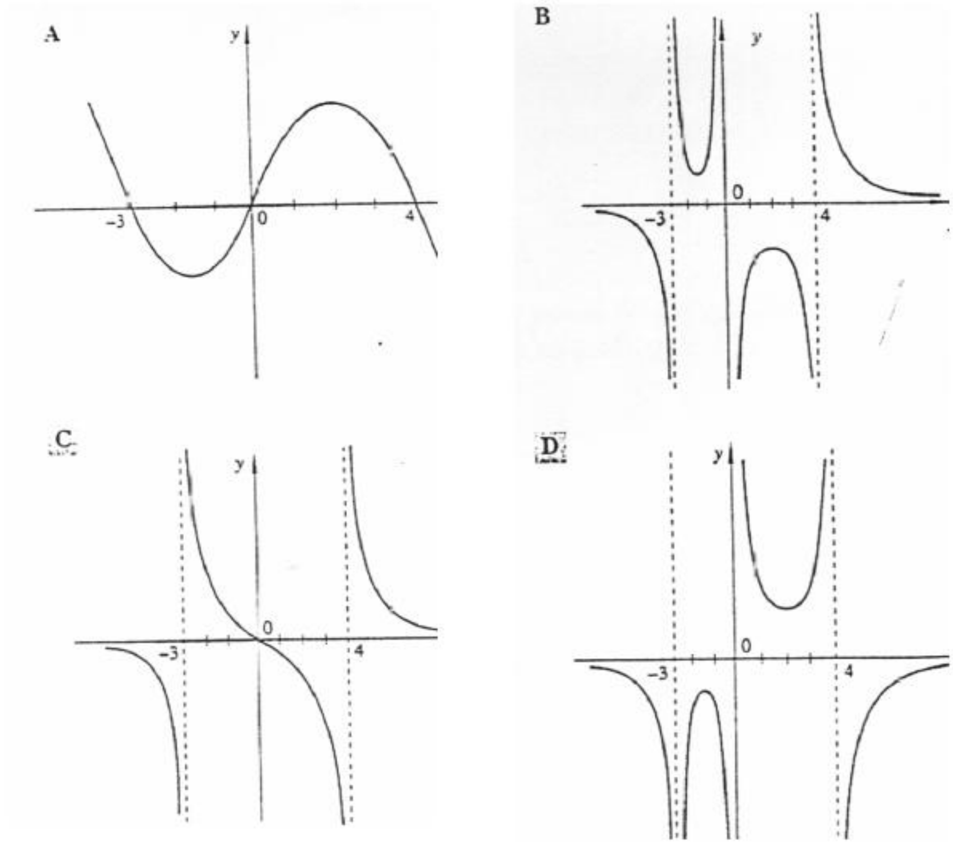
Questões de escolha múltipla

Nas questões seguintes, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

1. A figura representa o gráfico da função g.



Então o gráfico da função definida por $\dfrac{1}{g(x)}$ poderá ser:



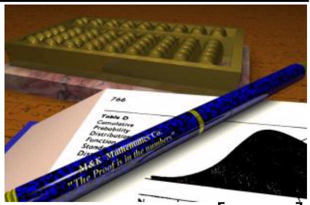
2. Seja h_k, com $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a função real de variável real definida por $h_k(x) = k\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$.

Então $\lim\limits_{x \to +\infty} h_k(x)$:

(A) Não existe (B) é k (C) é $+\infty$ (D) é 0

Ficha de Trabalho

- Cálculo Diferencial



3. Sabe-se que uma função t, real de variável real, é apenas contínua e monótona em $\left[-5;2\right]$ e que t(-5)xt(2) > 0. Qual das afirmações é verdadeira?

(A) A equação t(x)=0 tem pelo menos uma solução $\left]-5\,;2\right[$

(B) Nada se pode concluir sobre o número de soluções da equação t(x)=0 em $\left]-5\,;2\right[$

(C) A equação t(x)=0 não tem solução em $\left]-5\,;2\right[$

(D) A equação t(x)=0 tem infinitas soluções em $\left]-5\,;2\right[$

4. Seja f uma família de funções definida em IR por f(x) = g(x) + k, com k constante real. Pode afirmar-se que:

(A) Se f(a) = 0 então g(a) = 0

(B) $f'(x) = g'(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$

(C) $f'(x) = g'(x)+k,\ \forall x \in \mathbb{R}$

(D) Para cada k>0 a função f cresce mais rapidamente do que a g

5. Seja h a função definida em IR por $h(x)=\left(\frac{\pi}{3}\right)^3$. Então h'(1) é:

(A) π^2 (B) $\frac{\pi^2}{3}$ (C) 0 (D) $\frac{\pi^2}{9}$

6. Se uma função f tem dois zeros então $f(|x|)$:

(A) Tem obrigatoriamente 4 zeros (B) Tem no mínimo 3 zeros

(C) Pode ter ou não zeros (D) Tem obrigatoriamente 2 zeros

7. Seja g a função definida em IR por $g(x)=x^3+x-1$.

O teorema de Bolzano permite-nos afirmar que a equação g(x) = 5 tem pelo menos uma solução em

(A) $\left]-2\,;-1\right[$ (B) $\left]-1;0\right[$ (C) $\left]0\,;1\right[$ (D) $\left]1;2\right[$

8. Seja f uma função real de variável real tal que:

- f é contínua em $[a,b]$
- $f'(x)>0,\quad \forall x\in[a\,,b]$
- $\exists c \in \left]a\,,b\right[: f(c)<0$

A respeito da equação f(x)=0 podemos concluir que:

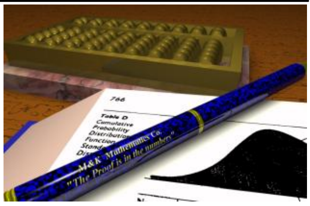
(A) Tem uma solução em $\left]a\,;c\right[$

(B) (B) Tem uma solução em $\left]c\,;b\right[$

(C) Tem uma solução em $\left]a\,;c\right[$ e outra em $\left]c\,;b\right[$

(D) Nenhuma das conclusões anteriores é válida

Ficha de Trabalho



- Cálculo Diferencial

9. Sabendo que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = +\infty$ e h(x) = x-2, pode concluir-se que:

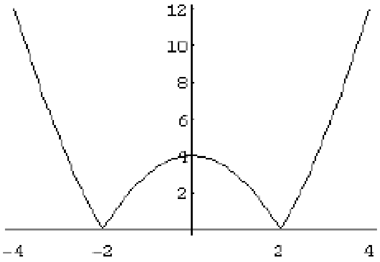
(A) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{h(x)}{f(x)-4}$ conduz a uma indeterminação

(B) $\lim\limits_{x\to 2} [g(x).h(x)] = 0$

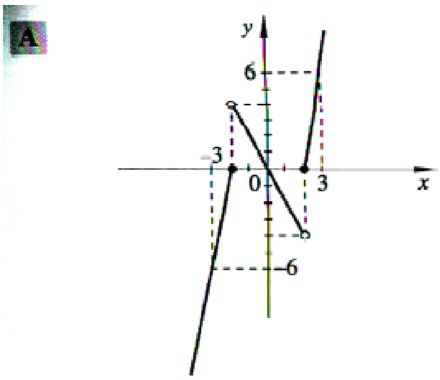
(C) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{h(x)}{g(x)}$ conduz a uma indeterminação

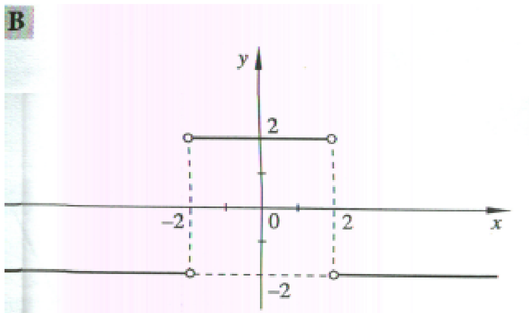
(D) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{h(x)} = +\infty$

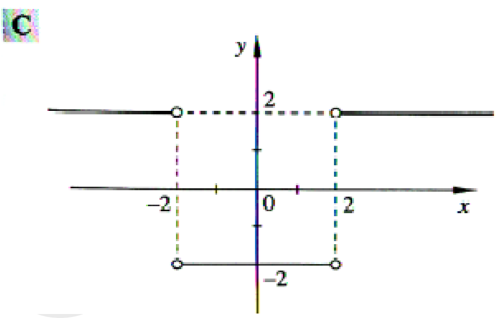
10. Seja f a função definida por $f(x) = |x^2 - 4|$ e cuja representação gráfica é:

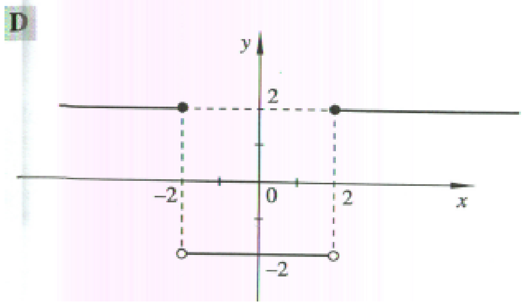


A representação gráfica de f '' é:









11. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = (x^3+8)(4-x^2)^{-1}$.

Quanto à existência de assimptotas, o gráfico de y=g(x) tem:

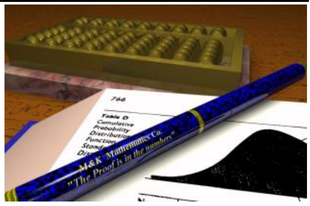
(A) Assímptota vertical $x = 2$ e não tem assímptotas não verticais

(B) Assímptota vertical $x = 2$ e assímptota oblíqua $y = -x$

(C) Assímptotas verticais, $x = -2$ e $x = 2$

(D) Assímptota vertical $x = 2$ e assímptota oblíqua $y = x$

Ficha de Trabalho

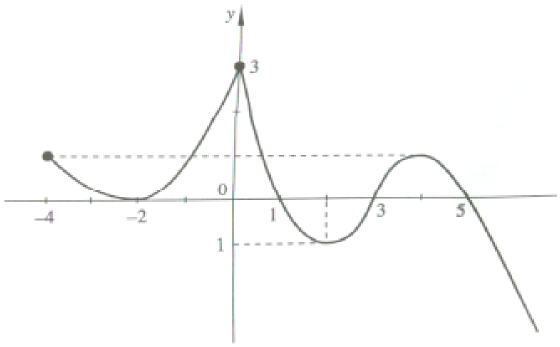


- Cálculo Diferencial

12. Se $y = h(x)$ é uma função que admite a assímptota $y = 3x + 4$, então $y = 2 + h(x+1)$ admitirá a assímptota:

(A) $y = 3x + 9$ (B) $y = 3x + 7$ (C) $y = -3x - 2$ (D) $y = -3x - 5$

13. Seja f a função de domínio $[-4;+\infty[$, cuja representação gráfica é:



1. O conjunto solução de $|f(x)| + f(x) = 0$ é:

(A) IR

(B) $\{-2\} \cup [1;3] \cup [5;+\infty[$

(C) $\{-2;1;3;5\}$

(D) $[-4;1] \cup [3;5]$

(E)

2. O conjunto solução de $|f(x)| - f(x) = 0$ é:

(A) IR

(B) $\{-2\} \cup [1;3] \cup [5;+\infty[$

(C) $\{-2;1;3;5\}$

(D) $[-4;1] \cup [3;5]$

3. O conjunto solução da condição $f'(x).f''(x) > 0$ é:

(A) $[-2;0[\cup [2;3] \cup [4;+\infty[$

(B) $]-2;0[\cup]2;3[\cup]4;+\infty[$

(C) $\{-2;2;3;4\}$

(D) $]-2;0] \cup]2;3[\cup]4;+\infty[$

14. Sendo f uma função real de variável real definida num intervalo $[a;b]$, afirma-se que:

1 – Se a taxa de variação média de f em $[a;b]$ é positiva, então f é crescente nesse intervalo.

2 – Se f é contínua em $[a;b]$ e f(a).f(b) < 0, então $|f|$ tem pelo menos um zero pertencente a esse intervalo.

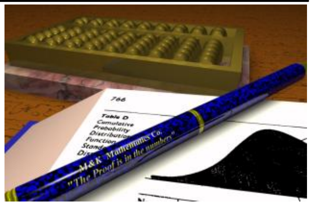
Quanto a valor lógico, as afirmações anteriores:

(A) São ambas falsas (B) 1 é falsa e 2 verdadeira

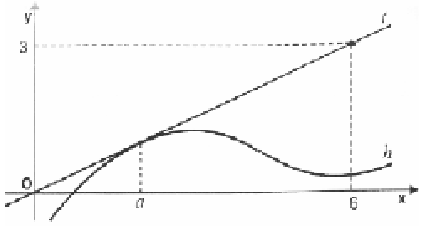
(C) 1 é verdadeira e 2 falsa (D) São ambas verdadeiras

Ficha de Trabalho

- Cálculo Diferencial

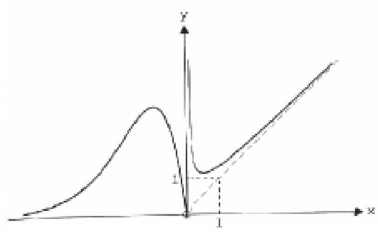


15. Na figura junta está a representação gráfica de uma função h e de uma recta t, tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa a.
A recta t passa pela origem do referencial e pelo ponto de coordenadas (6 ; 3). O valor de h'(a) é:



(A) $-\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

16. A figura representa o gráfico de uma função f, real de variável real.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?



(A) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = +\infty$

(B) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 1$

(C) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 0$

(D) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 0$

17. Se $y = h(x)$ é uma função que admite a assímptota $y = 3x + 4$, então $y = 2 - h(x+1)$ admitirá a assímptota:

(A) $y = 3x + 9$ (B) $y = 3x + 7$ (C) $y = -3x - 2$ (D) $y = -3x - 5$

18. De duas funções reais de variável real, f e g, sabe-se que f(0)=1 e f'(0)=-3 e que $g(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$.

1. A derivada da função $y = \left(g.\sqrt{f}\right)(x)$ no ponto de abcissa zero é:

(A) $\frac{15}{2}$ (B) $\frac{9}{2}$ (C) $-\frac{15}{2}$ (D) 1

2. Uma equação da normal ao gráfico da função f, no seu ponto de abcissa zero é:

(A) $y = \frac{1}{3}x - 1$ (B) $x - 3y + 3 = 0$ (C) $3x - y + 1 = 0$ (D) $y = -3x + 1$

19. De uma função real de variável real sabe-se que:

- $-f(-x) = f(x)$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$
- $f(-5) = 1$

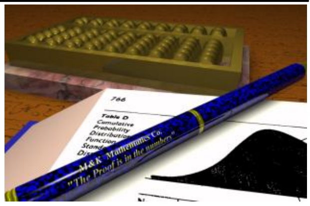
Podemos então afirmar que:

(A) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2 \wedge f(5) = 1$ (B) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2 \wedge f(5) = -1$

(C) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 \wedge f(5) = 1$ (D) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 \wedge f(5) = -1$

Ficha de Trabalho

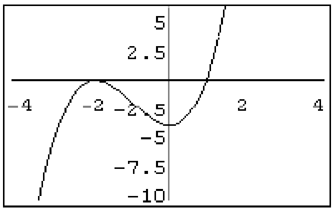
- Cálculo Diferencial



20. Na figura ao lado, está representado o gráfico de $y = f'(x)$. Acerca da função $y = f(x)$, podemos afirmar que:

(A) Tem 2 extremos, um máximo e um mínimo (B) Tem apenas um máximo

(C) Tem apenas um mínimo (D) Não tem extremos



21. Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que $f(x) = \pi^3$ e $g(x) = x$. Então $(f \times g)'(x)$ é:

(A) $3\pi^2$ (B) $\pi^3 + 3\pi^2 x$ (C) π^3 (D) 0

22. Sendo $f(x) = \dfrac{x}{2x+3}$, e sabendo que g(-1) = 2 e que g'(-1) = -2, pode afirmar-se que $\left(\dfrac{k+g}{f}\right)'$, com $k \in IR$, é igual a:

(A) -4 (B) -3k-4 (C) -4.(1+k) (D) $\dfrac{k-2}{3}$

23. Seja f uma função real de variável real tal que:

- $\forall x \in [a;b], \exists k \in IR^- : f'(x) = k$
- $\exists c \in]a;b[: f(c) < 0$
- f(a) = 3

A respeito da equação f(x) = 0, em $]a;b[$, podemos concluir que:

(A) Tem uma solução em $]a\,;c[$

(B) Tem uma solução em $]a\,;c[$ e outra em $]c\,;b[$

(C) Tem uma solução em $]c\,;b[$

(D) Nenhuma das conclusões anteriores é válida

24. Considere a função h definida por $h(x) = \dfrac{x-2}{x^2 - 3x + 2}$. O valor de $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$ é:

(A) 0 (B) $+\infty$ (C) $-\infty$ (D) 1

25. De uma função f, contínua, de domínio IR, sabe-se que

- $f(-2) = 3$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
- f é impar

Nestas condições podemos afirmar que

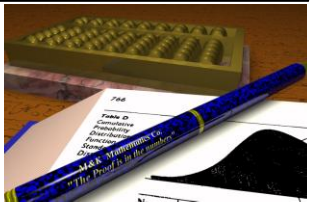
(A) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, f(2) = 3 e $f(0) = 0$

(B) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, f(2) = -3 e $f(0) = 1$

(C) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, f(2) = -3 e $f(0) = 0$

(D) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, f(2) = 3 e $f(0) = 1$

Ficha de Trabalho



- Cálculo Diferencial

26. Sejam f e g funções reais de variável real tais que $f(x)=\frac{2x}{\pi^2}$, g(2) = 1 e g´(2) = -3.

1. O valor de $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{f(1)-f(x)}$ é

(A) $2\pi^{-2}$ (B) $-\frac{2}{\pi^2}$ (C) $\frac{\pi^2}{2}$ (D) $-\frac{\pi^2}{2}$

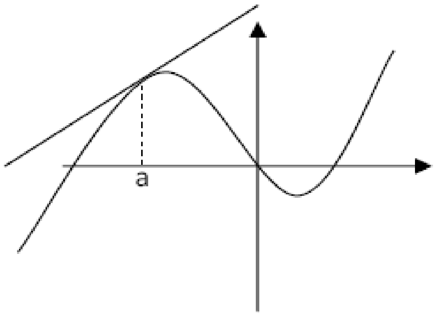
2. A recta tangente ao gráfico de $y=g(x+1)-3$ no ponto de abcissa 1, é

(A) $y=-3x-10$ (B) $y=-3x-5$ (C) $y=-3x+1$ (D) $y=-3x-4$

27. A recta de equação $2x-y+1=0$ é paralela à tangente à curva $y=x^2-bx-2$ no ponto de abcissa 2. Então o valor de b é:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

28. A figura representa o gráfico de uma função f. A recta t é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a.



28.1. 1. $f'(a).f''(a) < 0$

2. $f(a).f'(a) > 0$

Quanto ao valor lógico, as afirmações anteriores:

(A) São ambas falsas (B) 1 é falsa e 2 verdadeira

(C) 1 é verdadeira e 2 falsa (D) São ambas verdadeiras

28.2. Relativamente às assímptotas, podemos afirmar que a função $\frac{1}{f}$

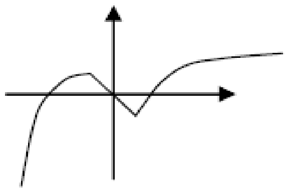
(A) admite apenas três assímptotas verticais

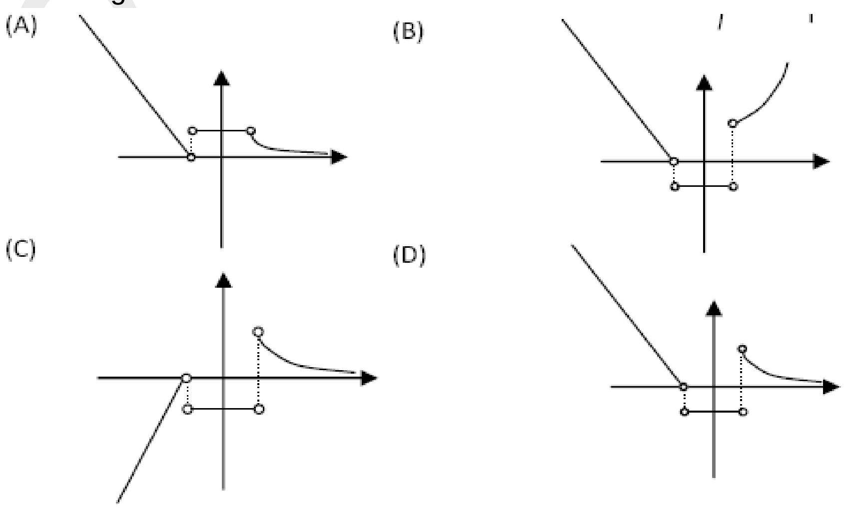
(B) admite três assímptotas verticais e uma horizontal

(C) admite três assímptotas verticais e duas horizontais

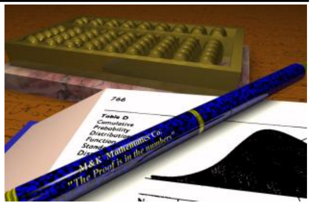
(D) não admite assímptotas

29. A figura representa o gráfico de uma função f, real de variável real. Um possível gráfico de f´ será





Ficha de Trabalho



- Cálculo Diferencial

30. Seja f uma função real de variável real tal que:

- $D_{f'} = IR$
- $\exists c \in]a;b[: f(c) > 0$
- f(a) = -1
- f(a).f(b) > 1

A respeito da equação f(x) = 0, em $]a;b[$, podemos concluir que:

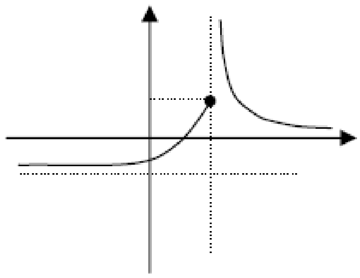
(A) Tem uma solução em $]a\,;c[$

(B) Tem uma solução em $]a\,;c[$ e outra em $]c\,;b[$

(C) Tem uma solução em $]c\,;b[$

(D) Nenhuma das conclusões anteriores é válida

31. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função f, cujo domínio é IR. As rectas de equações y = 0, x = 2 e y = -1 são assímptotas do gráfico de f.



Considere as sucessões $x_n = \dfrac{2n-1}{n}$ e $y_n = \dfrac{n}{2}$.

Sejam $u_n = f(x_n)$ e $v_n = f(y_n)$.

Se $L_1 = \lim(u_n)$ e $L_2 = \lim(v_n)$, os seus valores são:

(A) $L_1 = 1$ e $L_2 = +\infty$ (B) $L_1 = 1$ e $L_2 = -1$

(C) $L_1 = +\infty$ e $L_2 = 0$ (D) $L_1 = 1$ e $L_2 = 0$

32. Seja f uma função contínua e monótona no intervalo $[-2;2]$. Sabe-se ainda que f(-2) = -5 e que f(1) = 2. Pode afirmar-se que, em $[-2;2]$, a função f

(A) Pode ter ou não raízes (B) Tem uma e uma só raiz

(C) Pode ter mais que uma raiz (D) Não tem raízes

33. Considere a função h definida por $h(x) = \dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$. O valor de $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x)$ é:

(A) 0 (B) $+\infty$ (C) $-\infty$ (D) 1

34. Seja $g(x) = 5x^2 + 3\pi$. O valor de $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(1+h) - g(1)}{h}$ é

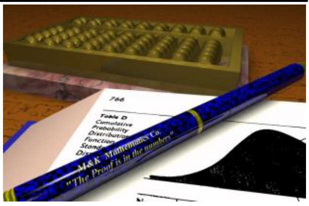
(A) $5+3\pi$ (B) $10+3\pi$ (C) 10 (D) 13

35. Seja $f(x) = x^2 - 3$. Então o $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1}$

(A) é igual a $+\infty$ (B) é igual a $-\infty$

(C) é zero (D) não existe

Ficha de Trabalho



- Cálculo Diferencial

36. Sejam f e g funções deriváveis e tais que $g(-1)=1$, $g'(-1)=2$ e $f'(1)=1$. Então, o valor da derivada de $f\left(g\left(-\frac{1}{2}x\right)\right)$ no ponto de abcissa 2 é:

(A) 2 (B) 1 (C) -1 (D) -2

37. Sejam $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x}$ e $L_2 = \lim\limits_{x\to 0^+} (x.\ln x)$. Então sabe-se que:

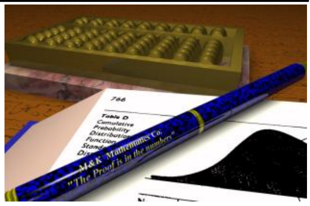
(A) $L_1 = 1$ e $L_2 = 0$

(B) $L_1 = -1$ e $L_2 = -\infty$

(C) $L_1 = -1$ e $L_2 = +\infty$

(D) $L_1 = -1$ e $L_2 = 0$

Ficha de Trabalho



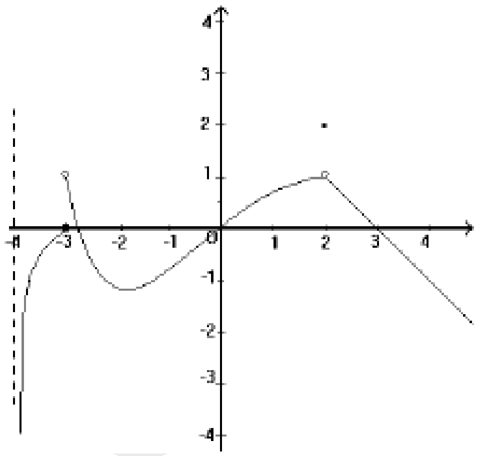
- Cálculo Diferencial

Parte II

Questões de resposta aberta

Indique todos os cálculos que efectuar. Explique os raciocínios e justifique as conclusões.

1. Na figura está esboçado o gráfico da função $y = f(x)$. De acordo com ele



1.1. Determine o domínio e o contradomínio de f.

1.2. Determine os seguintes limites, caso existam (caso não existam deverá justificar porquê):

1.2.1. $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$

1.2.2. $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

1.2.3. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

1.2.4. $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)|$

1.3. Determine equações das suas assímptotas, caso existam.

1.4. Indique os pontos de descontinuidade de f, justificando.

1.5. Indique um ponto em que a função tenha derivada positiva e outro em que tenha derivada negativa. Justifique a sua escolha.

1.6. Justifique que a função não é derivável no ponto de abcissa -3.

1.7. Determine, justificando, $f'(3)$.

2. Considere a família de funções reais de variável real cuja derivada é definida em IR por

$$\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

2.1 Pode garantir-se que qualquer função da família é contínua no ponto 0? Justifique a sua resposta.

2.2 Justifique que para toda a função da família se tem

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{9}.$$

2.3 Mostre que a função g definida em IR por $\frac{x^3}{x^2 - 1}$ é uma das funções da família.

2.4 Determine uma equação da tangente ao gráfico da função $y = g(x)$ no ponto de abcissa -2.

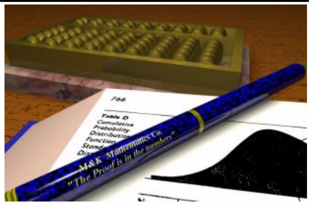
3. Considere a função real de variável real definida do seguinte modo:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 5}{x + 4} & \Leftarrow x \leq 2 \\ \sqrt{x + 7} & \Leftarrow x > 2 \end{cases}$$

3.1. Estude a continuidade da função g em IR.

3.2. Estude a existência de assímptotas ao gráfico da função $y = g(x)$.

Ficha de Trabalho



- Cálculo Diferencial

3.3. Utilize a definição de derivada de uma função num ponto para calcular $g'(9)$.

3.4. Caracterize a função derivada de $y = g(x)$.

3.5. Mostre que $y = g(x)$ admite um zero no intervalo $[1;2]$.

4. Determine uma equação da recta tangente ao gráfico de $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 2}$, no ponto (1;-1).

5. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 - 3 \Leftarrow x < 1 \\ |x^2 - 6x| \Leftarrow x \geq 1 \end{cases}$

5.1. Averigúe se f é derivável para x = 1.

5.2. Estude a monotonia e determine os extremos (caso existam) de f no intervalo $]-\infty;1[$.

5.3. Mostre que (-1 ; -3) é um ponto de inflexão de f.

5.4. Determine os pontos da curva representativa da restrição de f a $]-\infty;1[$ em que a tangente ao gráfico é paralela à recta $12x - y + 5 = 0$.

6. Acerca de duas funções reais de variável real $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sabe-se que:

$f(x) = \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^2$, $g(0) = 3$; $g'(0) = -2$.

6.1. Calcule:

6.1.1. $(f \times g)'(0)$

6.1.2. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(0)$

6.1.3. $\left(\sqrt{g}\right)'(0)$

6.1.4. $(f \circ g)'(0)$

6.2. g é uma função contínua no ponto de abcissa 0. Justifique.

6.3. Determine a equação reduzida da normal ao gráfico de g no ponto de abcissa 0.

6.4. Relativamente à função $y = f(x)$, determine os intervalos em que é crescente e identifique, caso existam, os seus extremos.

7. Considere a função real de variável real, de domínio IR, definido por

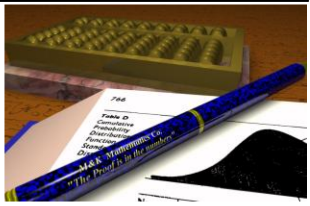
$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{1-\sqrt{x}} \Leftarrow x > 1 \\ \dfrac{-2x^2 + 4x}{x-2} \Leftarrow x \leq 1 \end{cases}$$

7.1. Mostre que a função $y = h(x)$ é contínua mas não derivável no ponto de abcissa 1.

7.2. Verifique se existem pontos do gráfico de h, de abcissa menor que 1, onde as tangentes ao gráfico sejam perpendiculares à assímptota ao gráfico de h quando $x \to -\infty$.

Ficha de Trabalho

- Cálculo Diferencial



8. Para cada valor real de k, a expressão $f_k(x)=\dfrac{x^3+kx-2}{x+1}$ define uma função real de variável real de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

8.1. Determine o valor de k de modo que para a função correspondente, $y=g(x)$, se tenha $g'(x)=\dfrac{x^2.(3+2x)}{(x+1)^2}$.

8.2. Faça o estudo das concavidades de $y=g(x)$ e indique, caso existam, os seus pontos de inflexão.

8.3. Defina, por uma equação vectorial, a tangente ao gráfico de $g(x)$, no ponto de abcissa -2.

9. Sejam f e g funções reais de variável real, diferenciáveis em IR, tais que f ‘ = g e g’ = -f. Sabe-se que os respectivos gráficos se intersectam no ponto P(2 ; 3).Seja $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por $h(x)=g^2(x)+f^2(x)$. Determine $y=h(x)$.

(Sugestão: comece por definir $y=h'(x)$).

10. Utilizando as regras de derivação, determine as derivadas das funções definidas pelas seguintes expressões designatórias:

10.1. $\left(\dfrac{x^2+2x}{x-1}\right)^3$ 10.2. $\sqrt[3]{x^3-2}$ 10.3. $\left(\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{4x-1}\right)$

11. Considere a função real de variável real, definida por $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} & \Leftarrow x<1\\ k & \Leftarrow x=1, \quad \text{com } k\in\mathbb{R}\\ \dfrac{x^3-3x^2+5x-3}{x-1} & \Leftarrow x>1\end{cases}$

11.1. Verifique se existe algum valor de k, para o qual a função correspondente seja contínua no ponto de abcissa um.

11.2. Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, e tire conclusões acerca da existência de assímptotas não verticais ao gráfico de $y=g(x)$, quando $x\to-\infty$.

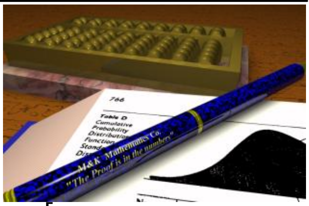
11.3. Determine a equação reduzida da tangente ao gráfico de $y=g(x)$, no ponto de abcissa 2.

12. Considere a função real de variável real definida por $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & \Leftarrow x\le 1\\ \dfrac{x^3-x^2-2x}{4-x^2} & \Leftarrow x>2\end{cases}$

12.1. Indique o domínio de $y=f(x)$ e averigúe da existência de assímptotas não verticais ao respectivo gráfico.

12.2. Mostre que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\dfrac{3}{2}$.

Ficha de Trabalho



- Cálculo Diferencial

12.3. Sabendo que $y=f(x)$ é uma função contínua em $\left]-\infty;1\right]\cup\left]2+\infty\right[$, defina uma sua extensão que seja contínua em IR.

12.4. Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, caracterize a função derivada da restrição de $y=f(x)$ ao intervalo $\left]-\infty;1\right[$.

12.5. Determine a equação reduzida da normal ao gráfico de $y=f(x)$ no ponto de abcissa -3.

13. Esboce um possível gráfico de uma função real de variável real $y=g(x)$, que satisfaça as seguintes condições.

- $D_g=\mathbb{R}$
- g é contínua em IR\{-2;0}
- $\lim\limits_{x\to -2} g(x)=3$
- $g'(1)=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)+x\right]=1$
- $g'_e(-2)=-\infty$
- $g(0)=0$
- g admite a assímptota horizontal y = 0
- $\lim\limits_{x\to -0^+} g(x)=-\infty$

14. $h'(x)=\begin{cases}12x-3x^2 & \Leftarrow x<2\\ \dfrac{x^2-9}{x} & \Leftarrow x>2\end{cases}$ é a função derivada de uma função real de variável real, $y=h(x)$, de domínio IR. Sabe-se ainda que $h(x)=-x^3+6x^2-6,\ \forall x\in\left]-\infty;2\right]$ e que é descontínua para x = 2.

14.1. Prove que a função $y=h(x)$ é contínua no seu ponto de abcissa 4.

14.2. Indique, justificando, o valor lógico da proposição: $\exists c\in\left]-1;1\right[: h(c)=0$.

14.3. Estude a função $y=h(x)$ quanto à existência de extremantes, sabendo que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{h(a+2)-h(2)}{a}=+\infty$. Indique também os intervalos de monotonia da função.

14.4. Determine as abcissas dos pontos de inflexão de $y=h(x)$, caso existam.

14.5. Calcule $h''(5)$, utilizando a definição de derivada de uma função num ponto.

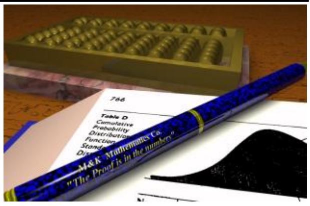
14.6. Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de $y=h(x)$, num ponto de abcissa superior a 2, que é perpendicular à recta de equação $(x,y)=\left(-\pi;\dfrac{\pi}{3}\right)+\lambda(-7;4),\ \lambda\in\mathbb{R}$, sabendo que a ordenada do ponto de tangencia é 11.

15. Seja $y=h(x)$ a função de domínio $\left]-\infty;0\right[\cup\left[3;+\infty\right[$, definida por

$$h(x)=\begin{cases}-x^3+\dfrac{3}{2}x^2+6x+2 & \Leftarrow x<0\\ 1-\sqrt{x-3} & \Leftarrow x\geq 3\end{cases}$$

15.1. Determine $h(\left[-2;0\right[)$.

Ficha de Trabalho



- Cálculo Diferencial

15.2. Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule $h'(4)$. Que pode concluir sobre a continuidade de h no ponto de abcissa 4? Justifique.

15.3. Existe um ponto do gráfico de h, no semi plano definido pela condição $x \geq 3$, no qual a recta normal ao gráfico é paralela à recta de equação $4x - y + 1 = 0$. Determine-o.

15.4. Caracterize uma extensão da função h, que seja contínua em IR.

16. Prove que toda a função polinomial de grau três, admite um ponto de inflexão.

17. Considere a família de funções reais de variável real cuja derivada é definida em IR por

$$\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

17.1. Sendo $y = f(x)$ uma qualquer função da família, indique, justificando, o valor de

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h}$$

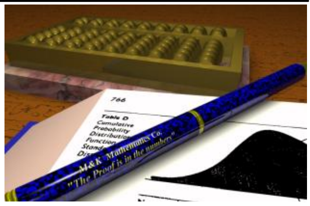
17.2. Mostre que a função g, definida em IR por $\frac{x^2}{x^2+1}$, é uma das funções da família.

17.3. Faça um estudo da função $y = g(x)$ quanto ao sentido das concavidades e existência de pontos de inflexão.

17.4. Determine uma equação da normal ao gráfico da função $y = g(x)$, no ponto de abcissa 1.

Ficha de Trabalho

- Cálculo Diferencial



Soluções

Parte I

Questões de escolha múltipla

1B	2D	3C	4B	5C	6C	7D	8D	9A	10C
11B	12A	13.1B	13.2D	13.3B	14B	15D	16C	17D	18.1A
18.2B	19D	20C	21C	22B	23A	24B	25C	26.1D	26.2C
27C	28.1D	28.2B	29D	30B	31D	32B	33B	34C	35D
36C	37D								

Parte II

Questões de resposta aberta

1.1. $\left]-4;+\infty\right[$; $\left]-\infty;1\right[\cup \{2\}$

1.2.1. (- ∞) 1.2.2. Não existe 1.2.3. 1

1.2.4. (+ ∞) 1.3. $x = -4$; $y = -x + 3$

1.4. (-3) ; 2 1.5. 0 ; 3 1.7. (-1)

2.1. Sim 2.4. $y = \frac{4}{9}x - \frac{16}{9}$

3.1. Contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-4;2\}$

3.2. $x = -4$ 3.3. $\frac{1}{8}$

3.4.

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 + 12x^2 + 5}{(x+4)^2} \Leftarrow x < 2 \wedge x \neq -4 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+7}} \Leftarrow x > 2 \end{cases}$$

4. $y = 4x + 3$

5.1. Não 5.2. Mon. Cresc. ; não tem extremos

5.4. (-3 ; -11)

6.1.1 –20 6.1.2. $-\frac{4}{9}$

6.1.3. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 6.1.4. $-\frac{5}{16}$

6.3. $y = \frac{1}{2}x + 3$

6.4. Cresc. em $\left[-2;-1\right[$ - Min = 0

7.2. Não existe

8.1. (-2) 8.2. P[to] de Inflexão – (0 ; -2) ; Conc voltada para baixo em $\left]-1;0\right[$

8.3. $(x;y) = (-2;6) + k(1;-4),\ k \in \mathbb{R}$

9. $h(x) = 18$

10.1. $\dfrac{3x^2(x+2)^2(x^2-2x-2)}{(x-1)^4}$

10.2. $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-2)^2}}$

10.3. $\dfrac{-4\sqrt{x^2+2}}{(4x-1)^2} + \dfrac{x}{(4x-1)\sqrt{x^2+2}}$

11.1. 2 11.2. (-1) ; Assimptota horizontal $y = -1$

11.3. $y = 2x - 1$

12.1. $\left]-\infty;1\right] \cup \left]2;+\infty\right[$; $y = -x + 1$

12.3. $f_1(x) = \begin{cases} f(x) \Leftarrow x \in D_f \\ -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \Leftarrow x \notin D_f \end{cases}$

12.4.
$$f_2' : \left]-\infty;-1\right[\to \Re$$
$$x \mapsto -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

12.5. $y = 4x + 14$

14.2. Verdade 14.3. Minimizantes para x=0 e x=3

14.4. Não existem

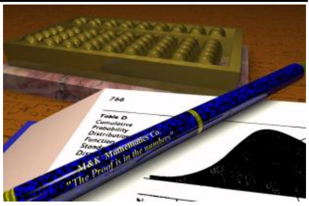
14.5. $\frac{84}{25}$ 14.6. $y = \frac{7}{4}x + 4$

15.1. $\left[1,5;4\right]$ 15.2. $-\frac{1}{2}$; contínua 15.3. (7 ; -1)

15.4. $h_1(x) = \begin{cases} h(x) \Leftarrow x \in D_h \\ -\frac{1}{3}x + 2 \Leftarrow x \notin D_h \end{cases}$

17.1. $-\frac{1}{2}$ 17.3. Pontos de inflexão para $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; Conc. voltada para cima em $\left]-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ 17.4. $y = -2x + \frac{5}{2}$

Ficha de Trabalho



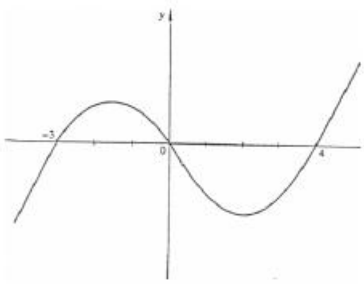
- Cálculo Diferencial

Parte I

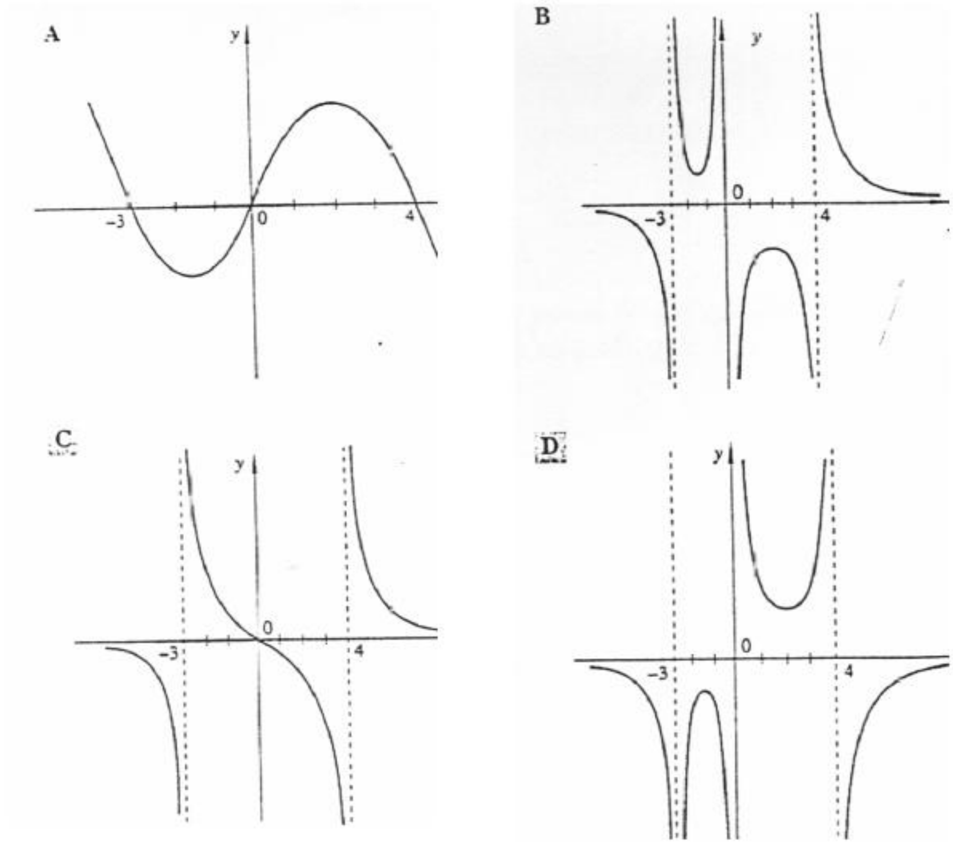
Questões de escolha múltipla

Nas questões seguintes, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

1. A figura representa o gráfico da função g.



Então o gráfico da função definida por $\dfrac{1}{g(x)}$ poderá ser:



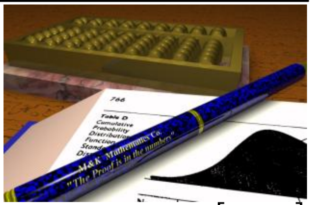
2. Seja h_k, com $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a função real de variável real definida por $h_k(x) = k\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$.

Então $\lim\limits_{x \to +\infty} h_k(x)$:

(A) Não existe (B) é k (C) é $+\infty$ (D) é 0

Ficha de Trabalho

- Cálculo Diferencial



3. Sabe-se que uma função t, real de variável real, é apenas contínua e monótona em $[-5;2]$ e que t(-5)xt(2) > 0. Qual das afirmações é verdadeira?

   (A) A equação t(x)=0 tem pelo menos uma solução $]-5\,;2[$

   (B) Nada se pode concluir sobre o número de soluções da equação t(x)=0 em $]-5\,;2[$

   (C) A equação t(x)=0 não tem solução em $]-5\,;2[$

   (D) A equação t(x)=0 tem infinitas soluções em $]-5\,;2[$

4. Seja f uma família de funções definida em IR por f(x) = g(x) + k, com k constante real. Pode afirmar-se que:

   (A) Se f(a) = 0 então g(a) = 0

   (B) $f'(x) = g'(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$

   (C) $f'(x) = g'(x)+k,\ \forall x \in \mathbb{R}$

   (D) Para cada k>0 a função f cresce mais rapidamente do que a g

5. Seja h a função definida em IR por $h(x) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^3$. Então h'(1) é:

   (A) π^2 (B) $\frac{\pi^2}{3}$ (C) 0 (D) $\frac{\pi^2}{9}$

6. Se uma função f tem dois zeros então $f(|x|)$:

   (A) Tem obrigatoriamente 4 zeros (B) Tem no mínimo 3 zeros

   (C) Pode ter ou não zeros (D) Tem obrigatoriamente 2 zeros

7. Seja g a função definida em IR por $g(x) = x^3 + x - 1$.

   O teorema de Bolzano permite-nos afirmar que a equação g(x) = 5 tem pelo menos uma solução em

   (A) $]-2\,;-1[$ (B) $]-1;0[$ (C) $]0\,;1[$ (D) $]1;2[$

8. Seja f uma função real de variável real tal que:

   - f é contínua em $[a,b]$
   - $f'(x) > 0,\quad \forall x \in [a\,,b]$
   - $\exists c \in \,]a\,,b[\,: f(c) < 0$

   A respeito da equação f(x)=0 podemos concluir que:

   (A) Tem uma solução em $]a\,;c[$

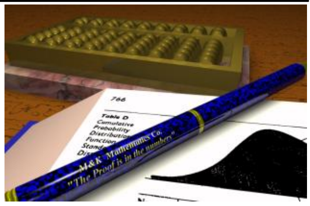
   (B) (B) Tem uma solução em $]c\,;b[$

   (C) Tem uma solução em $]a\,;c[$ e outra em $]c\,;b[$

   (D) Nenhuma das conclusões anteriores é válida

Ficha de Trabalho

- Cálculo Diferencial



9. Sabendo que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 2} g(x) = +\infty$ e h(x) = x-2, pode concluir-se que:

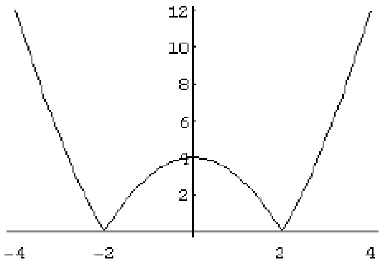
(A) $\lim_{x\to 2} \frac{h(x)}{f(x)-4}$ conduz a uma indeterminação

(B) $\lim_{x\to 2} [g(x).h(x)] = 0$

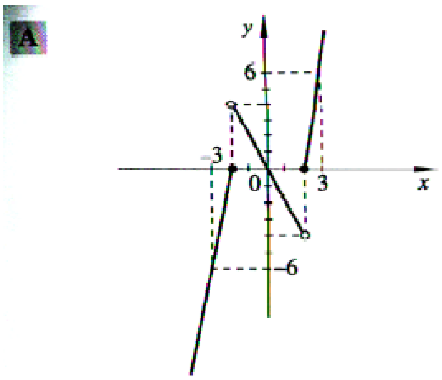
(C) $\lim_{x\to 2} \frac{h(x)}{g(x)}$ conduz a uma indeterminação

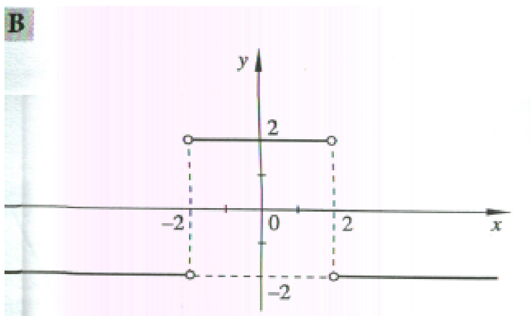
(D) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{h(x)} = +\infty$

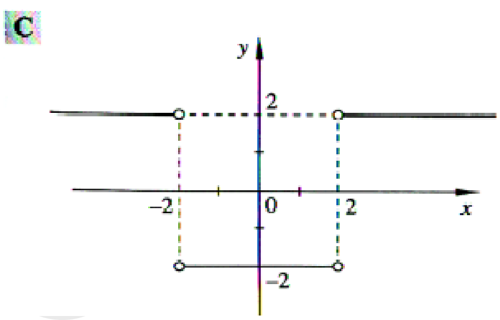
10. Seja f a função definida por $f(x) = |x^2 - 4|$ e cuja representação gráfica é:

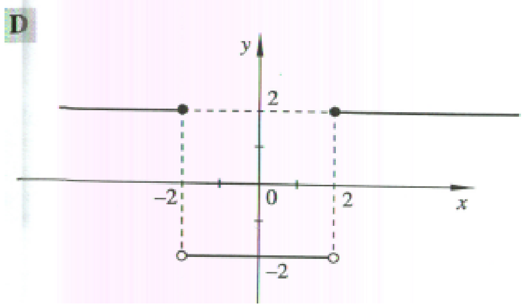


A representação gráfica de f '' é:









11. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = (x^3 + 8)(4 - x^2)^{-1}$.

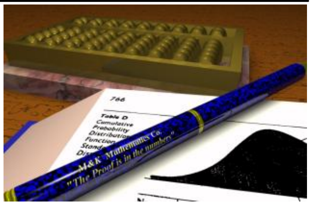
Quanto à existência de assimptotas, o gráfico de y=g(x) tem:

(A) Assímptota vertical $x = 2$ e não tem assímptotas não verticais

(B) Assímptota vertical $x = 2$ e assímptota oblíqua $y = -x$

(C) Assímptotas verticais, $x = -2$ e $x = 2$

(D) Assímptota vertical $x = 2$ e assímptota oblíqua $y = x$



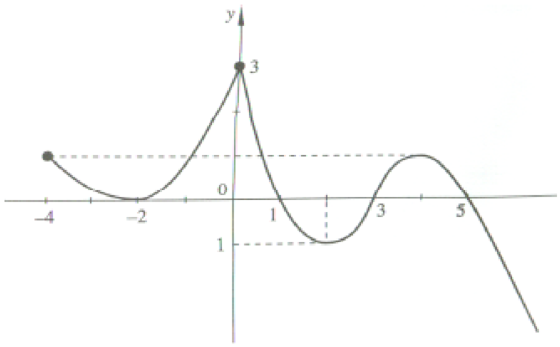
Ficha de Trabalho

- Cálculo Diferencial

12. Se $y = h(x)$ é uma função que admite a assímptota $y = 3x + 4$, então $y = 2 + h(x+1)$ admitirá a assímptota:

(A) $y = 3x + 9$ (B) $y = 3x + 7$ (C) $y = -3x - 2$ (D) $y = -3x - 5$

13. Seja f a função de domínio $[-4;+\infty[$, cuja representação gráfica é:



1. O conjunto solução de $|f(x)| + f(x) = 0$ é:

(A) IR

(B) $\{-2\} \cup [1;3] \cup [5;+\infty[$

(C) $\{-2;1;3;5\}$

(D) $[-4;1] \cup [3;5]$

(E)

2. O conjunto solução de $|f(x)| - f(x) = 0$ é:

(A) IR

(B) $\{-2\} \cup [1;3] \cup [5;+\infty[$

(C) $\{-2;1;3;5\}$

(D) $[-4;1] \cup [3;5]$

3. O conjunto solução da condição $f'(x).f''(x) > 0$ é:

(A) $[-2;0[\cup [2;3] \cup [4;+\infty[$

(B) $]-2;0[\cup]2;3[\cup]4;+\infty[$

(C) $\{-2;2;3;4\}$

(D) $]-2;0] \cup]2;3[\cup]4;+\infty[$

14. Sendo f uma função real de variável real definida num intervalo $[a;b]$, afirma-se que:

1 – Se a taxa de variação média de f em $[a;b]$ é positiva, então f é crescente nesse intervalo.

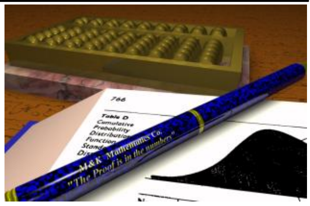
2 – Se f é contínua em $[a;b]$ e f(a).f(b) < 0, então $|f|$ tem pelo menos um zero pertencente a esse intervalo.

Quanto a valor lógico, as afirmações anteriores:

(A) São ambas falsas (B) 1 é falsa e 2 verdadeira

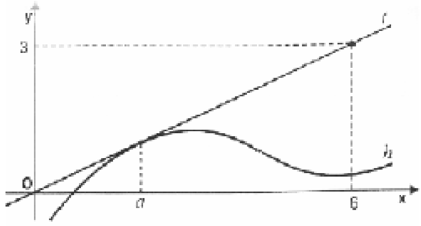
(C) 1 é verdadeira e 2 falsa (D) São ambas verdadeiras

Ficha de Trabalho



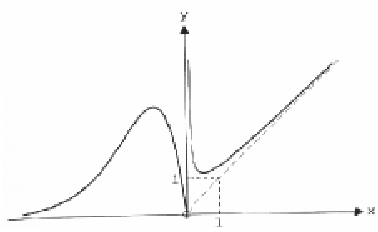
- Cálculo Diferencial

15. Na figura junta está a representação gráfica de uma função h e de uma recta t, tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa a.
A recta t passa pela origem do referencial e pelo ponto de coordenadas (6 ; 3). O valor de h'(a) é:



(A) $-\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

16. A figura representa o gráfico de uma função f, real de variável real.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?



(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x] = +\infty$

(B) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x] = 1$

(C) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x] = 0$

(D) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x] = 0$

17. Se $y = h(x)$ é uma função que admite a assímptota $y = 3x+4$, então $y = 2 - h(x+1)$ admitirá a assímptota:

(A) $y = 3x+9$ (B) $y = 3x+7$ (C) $y = -3x-2$ (D) $y = -3x-5$

18. De duas funções reais de variável real, f e g, sabe-se que f(0)=1 e f'(0)=-3 e que $g(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$.

1. A derivada da função $y = \left(g.\sqrt{f}\right)(x)$ no ponto de abcissa zero é:

(A) $\frac{15}{2}$ (B) $\frac{9}{2}$ (C) $-\frac{15}{2}$ (D) 1

2. Uma equação da normal ao gráfico da função f, no seu ponto de abcissa zero é:

(A) $y = \frac{1}{3}x - 1$ (B) $x - 3y + 3 = 0$ (C) $3x - y + 1 = 0$ (D) $y = -3x + 1$

19. De uma função real de variável real sabe-se que:

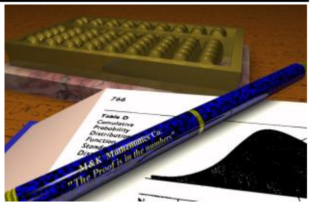
- $-f(-x) = f(x)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$
- $f(-5) = 1$

Podemos então afirmar que:

(A) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2 \wedge f(5) = 1$ (B) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2 \wedge f(5) = -1$

(C) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 \wedge f(5) = 1$ (D) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 \wedge f(5) = -1$

Ficha de Trabalho

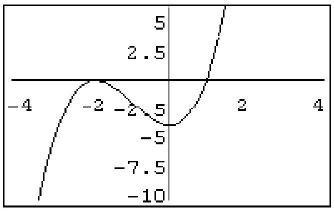


- Cálculo Diferencial

20. Na figura ao lado, está representado o gráfico de $y = f'(x)$. Acerca da função $y = f(x)$, podemos afirmar que:

(A) Tem 2 extremos, um máximo e um mínimo (B) Tem apenas um máximo

(C) Tem apenas um mínimo (D) Não tem extremos



21. Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que $f(x) = \pi^3$ e $g(x) = x$. Então $(f \times g)'(x)$ é:

(A) $3\pi^2$ (B) $\pi^3 + 3\pi^2 x$ (C) π^3 (D) 0

22. Sendo $f(x) = \dfrac{x}{2x+3}$, e sabendo que g(-1) = 2 e que g'(-1) = -2, pode afirmar-se que $\left(\dfrac{k+g}{f}\right)'$, com $k \in IR$, é igual a:

(A) -4 (B) -3k-4 (C) -4.(1+k) (D) $\dfrac{k-2}{3}$

23. Seja f uma função real de variável real tal que:

- $\forall x \in [a;b], \exists k \in IR^- : f'(x) = k$
- $\exists c \in]a;b[: f(c) < 0$
- f(a) = 3

A respeito da equação f(x) = 0, em $]a;b[$, podemos concluir que:

(A) Tem uma solução em $]a\,;c[$

(B) Tem uma solução em $]a\,;c[$ e outra em $]c\,;b[$

(C) Tem uma solução em $]c\,;b[$

(D) Nenhuma das conclusões anteriores é válida

24. Considere a função h definida por $h(x) = \dfrac{x-2}{x^2 - 3x + 2}$. O valor de $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$ é:

(A) 0 (B) $+\infty$ (C) $-\infty$ (D) 1

25. De uma função f, contínua, de domínio IR, sabe-se que

- $f(-2) = 3$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
- f é impar

Nestas condições podemos afirmar que

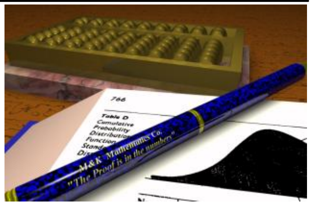
(A) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, f(2) = 3 e $f(0) = 0$

(B) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, f(2) = -3 e $f(0) = 1$

(C) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, f(2) = -3 e $f(0) = 0$

(D) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, f(2) = 3 e $f(0) = 1$

Ficha de Trabalho



- Cálculo Diferencial

26. Sejam f e g funções reais de variável real tais que $f(x)=\frac{2x}{\pi^2}$, g(2) = 1 e g´(2) = -3.

    1. O valor de $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{f(1)-f(x)}$ é

       (A) $2\pi^{-2}$ (B) $-\frac{2}{\pi^2}$ (C) $\frac{\pi^2}{2}$ (D) $-\frac{\pi^2}{2}$

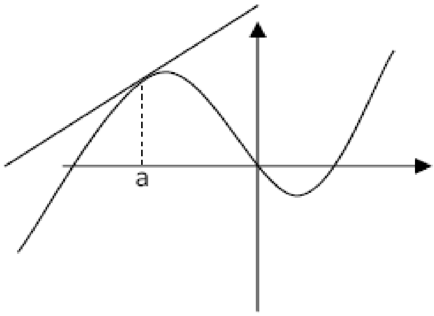
    2. A recta tangente ao gráfico de $y=g(x+1)-3$ no ponto de abcissa 1, é

       (A) $y=-3x-10$ (B) $y=-3x-5$ (C) $y=-3x+1$ (D) $y=-3x-4$

27. A recta de equação $2x-y+1=0$ é paralela à tangente à curva $y=x^2-bx-2$ no ponto de abcissa 2. Então o valor de b é:

    (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

28. A figura representa o gráfico de uma função f. A recta t é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a.



28.1. 1. f´(a).f´´(a) < 0

2. f(a).f´(a) > 0

Quanto ao valor lógico, as afirmações anteriores:

(A) São ambas falsas (B) 1 é falsa e 2 verdadeira

(C) 1 é verdadeira e 2 falsa (D) São ambas verdadeiras

28.2. Relativamente às assímptotas, podemos afirmar que a função $\frac{1}{f}$

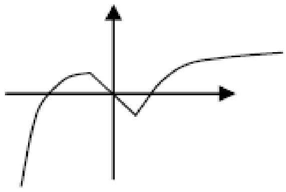
(A) admite apenas três assímptotas verticais

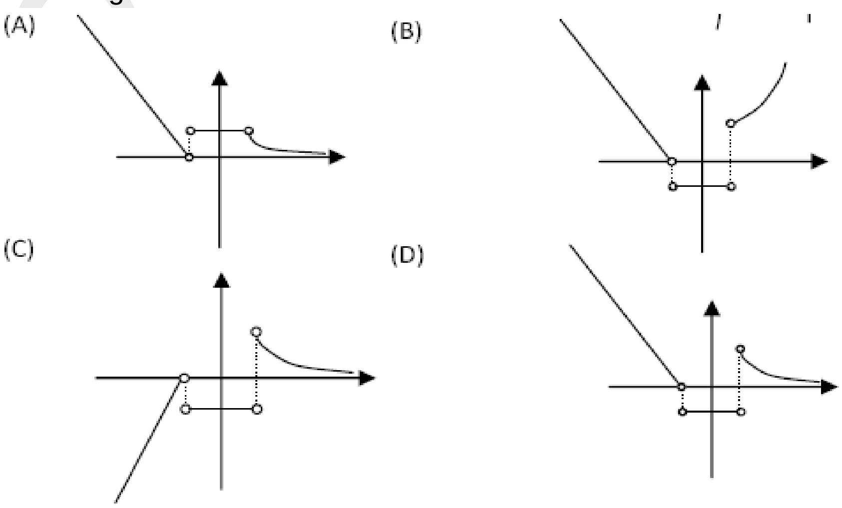
(B) admite três assímptotas verticais e uma horizontal

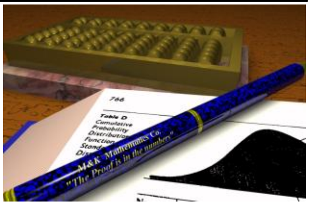
(C) admite três assímptotas verticais e duas horizontais

(D) não admite assímptotas

29. A figura representa o gráfico de uma função f, real de variável real. Um possível gráfico de f´ será







Ficha de Trabalho

- Cálculo Diferencial

30. Seja f uma função real de variável real tal que:

- $D_{f'} = IR$
- $\exists c \in]a;b[: f(c) > 0$
- f(a) = -1
- f(a).f(b) > 1

A respeito da equação f(x) = 0, em $]a;b[$, podemos concluir que:

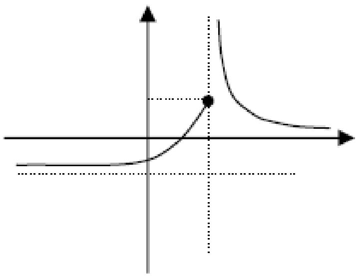
(A) Tem uma solução em $]a\,;c[$

(B) Tem uma solução em $]a\,;c[$ e outra em $]c\,;b[$

(C) Tem uma solução em $]c\,;b[$

(D) Nenhuma das conclusões anteriores é válida

31. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função f, cujo domínio é IR. As rectas de equações y = 0, x = 2 e y = -1 são assímptotas do gráfico de f.



Considere as sucessões $x_n = \frac{2n-1}{n}$ e $y_n = \frac{n}{2}$.

Sejam $u_n = f(x_n)$ e $v_n = f(y_n)$.

Se $L_1 = \lim(u_n)$ e $L_2 = \lim(v_n)$, os seus valores são:

(A) $L_1 = 1$ e $L_2 = +\infty$ (B) $L_1 = 1$ e $L_2 = -1$

(C) $L_1 = +\infty$ e $L_2 = 0$ (D) $L_1 = 1$ e $L_2 = 0$

32. Seja f uma função contínua e monótona no intervalo $[-2;2]$. Sabe-se ainda que f(-2) = -5 e que f(1) = 2. Pode afirmar-se que, em $[-2;2]$, a função f

(A) Pode ter ou não raízes (B) Tem uma e uma só raiz

(C) Pode ter mais que uma raiz (D) Não tem raízes

33. Considere a função h definida por $h(x) = \frac{x-3}{x^2-3x+2}$. O valor de $\lim_{x \to 2^-} h(x)$ é:

(A) 0 (B) $+\infty$ (C) $-\infty$ (D) 1

34. Seja $g(x) = 5x^2 + 3\pi$. O valor de $\lim_{h \to 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h}$ é

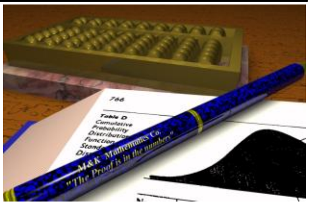
(A) $5+3\pi$ (B) $10+3\pi$ (C) 10 (D) 13

35. Seja $f(x) = x^2 - 3$. Então o $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}$

(A) é igual a $+\infty$ (B) é igual a $-\infty$

(C) é zero (D) não existe

Ficha de Trabalho



- Cálculo Diferencial

36. Sejam f e g funções deriváveis e tais que $g(-1)=1$, $g'(-1)=2$ e $f'(1)=1$. Então, o valor da derivada de $f\left(g\left(-\frac{1}{2}x\right)\right)$ no ponto de abcissa 2 é:

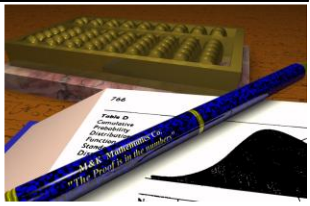
(A) 2 (B) 1 (C) -1 (D) -2

37. Sejam $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}$ e $L_2=\lim\limits_{x\to 0^+}(x.\ln x)$. Então sabe-se que:

(A) $L_1 = 1$ e $L_2 = 0$ (B) $L_1 = -1$ e $L_2 = -\infty$

(C) $L_1 = -1$ e $L_2 = +\infty$ (D) $L_1 = -1$ e $L_2 = 0$

Ficha de Trabalho



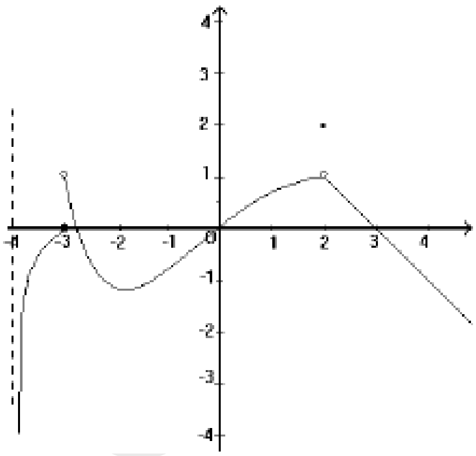
- Cálculo Diferencial

Parte II

Questões de resposta aberta

Indique todos os cálculos que efectuar. Explique os raciocínios e justifique as conclusões.

1. Na figura está esboçado o gráfico da função $y = f(x)$. De acordo com ele



1.1. Determine o domínio e o contradomínio de f.

1.2. Determine os seguintes limites, caso existam (caso não existam deverá justificar porquê):

1.2.1. $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$

1.2.2. $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

1.2.3. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

1.2.4. $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)|$

1.3. Determine equações das suas assímptotas, caso existam.

1.4. Indique os pontos de descontinuidade de f, justificando.

1.5. Indique um ponto em que a função tenha derivada positiva e outro em que tenha derivada negativa. Justifique a sua escolha.

1.6. Justifique que a função não é derivável no ponto de abcissa -3.

1.7. Determine, justificando, $f'(3)$.

2. Considere a família de funções reais de variável real cuja derivada é definida em IR por

$$\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

2.1 Pode garantir-se que qualquer função da família é contínua no ponto 0? Justifique a sua resposta.

2.2 Justifique que para toda a função da família se tem

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{9}.$$

2.3 Mostre que a função g definida em IR por $\dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ é uma das funções da família.

2.4 Determine uma equação da tangente ao gráfico da função $y = g(x)$ no ponto de abcissa -2.

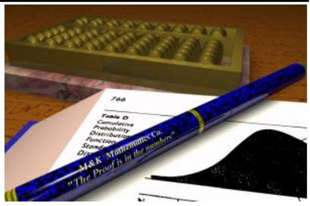
3. Considere a função real de variável real definida do seguinte modo:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 5}{x + 4} & \Leftarrow x \leq 2 \\ \sqrt{x + 7} & \Leftarrow x > 2 \end{cases}$$

3.1. Estude a continuidade da função g em IR.

3.2. Estude a existência de assímptotas ao gráfico da função $y = g(x)$.

Ficha de Trabalho



- Cálculo Diferencial

3.3. Utilize a definição de derivada de uma função num ponto para calcular $g'(9)$.

3.4. Caracterize a função derivada de $y = g(x)$.

3.5. Mostre que $y = g(x)$ admite um zero no intervalo $[1;2]$.

4. Determine uma equação da recta tangente ao gráfico de $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 2}$, no ponto (1;-1).

5. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 - 3 \Leftarrow x < 1 \\ |x^2 - 6x| \Leftarrow x \geq 1 \end{cases}$

5.1. Averigúe se f é derivável para x = 1.

5.2. Estude a monotonia e determine os extremos (caso existam) de f no intervalo $]-\infty;1[$.

5.3. Mostre que (-1 ; -3) é um ponto de inflexão de f.

5.4. Determine os pontos da curva representativa da restrição de f a $]-\infty;1[$ em que a tangente ao gráfico é paralela à recta $12x - y + 5 = 0$.

6. Acerca de duas funções reais de variável real $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sabe-se que:

$f(x) = \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^2$, $g(0) = 3$; $g'(0) = -2$.

6.1. Calcule:

6.1.1. $(f \times g)'(0)$

6.1.2. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(0)$

6.1.3. $\left(\sqrt{g}\right)'(0)$

6.1.4. $(f \circ g)'(0)$

6.2. g é uma função contínua no ponto de abcissa 0. Justifique.

6.3. Determine a equação reduzida da normal ao gráfico de g no ponto de abcissa 0.

6.4. Relativamente à função $y = f(x)$, determine os intervalos em que é crescente e identifique, caso existam, os seus extremos.

7. Considere a função real de variável real, de domínio IR, definido por

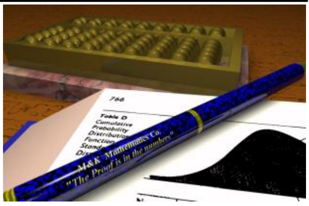
$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{1-\sqrt{x}} \Leftarrow x > 1 \\ \dfrac{-2x^2 + 4x}{x-2} \Leftarrow x \leq 1 \end{cases}$$

7.1. Mostre que a função $y = h(x)$ é contínua mas não derivável no ponto de abcissa 1.

7.2. Verifique se existem pontos do gráfico de h, de abcissa menor que 1, onde as tangentes ao gráfico sejam perpendiculares à assímptota ao gráfico de h quando $x \to -\infty$.

Ficha de Trabalho

- Cálculo Diferencial



8. Para cada valor real de k, a expressão $f_k(x)=\dfrac{x^3+kx-2}{x+1}$ define uma função real de variável real de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

8.1. Determine o valor de k de modo que para a função correspondente, $y=g(x)$, se tenha $g'(x)=\dfrac{x^2.(3+2x)}{(x+1)^2}$.

8.2. Faça o estudo das concavidades de $y=g(x)$ e indique, caso existam, os seus pontos de inflexão.

8.3. Defina, por uma equação vectorial, a tangente ao gráfico de $g(x)$, no ponto de abcissa -2.

9. Sejam f e g funções reais de variável real, diferenciáveis em IR, tais que f ‘ = g e g’ = -f. Sabe-se que os respectivos gráficos se intersectam no ponto P(2 ; 3).Seja $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por $h(x)=g^2(x)+f^2(x)$. Determine $y=h(x)$.

   (Sugestão: comece por definir $y=h'(x)$).

10. Utilizando as regras de derivação, determine as derivadas das funções definidas pelas seguintes expressões designatórias:

    10.1. $\left(\dfrac{x^2+2x}{x-1}\right)^3$ 10.2. $\sqrt[3]{x^3-2}$ 10.3. $\left(\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{4x-1}\right)$

11. Considere a função real de variável real, definida por $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} & \Leftarrow x<1\\ k & \Leftarrow x=1, \quad \text{com } k\in\mathbb{R}\\ \dfrac{x^3-3x^2+5x-3}{x-1} & \Leftarrow x>1\end{cases}$

11.1. Verifique se existe algum valor de k, para o qual a função correspondente seja contínua no ponto de abcissa um.

11.2. Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, e tire conclusões acerca da existência de assímptotas não verticais ao gráfico de $y=g(x)$, quando $x\to-\infty$.

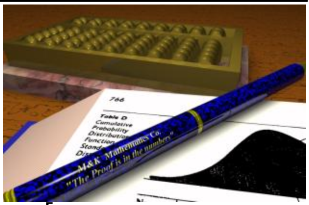
11.3. Determine a equação reduzida da tangente ao gráfico de $y=g(x)$, no ponto de abcissa 2.

12. Considere a função real de variável real definida por $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & \Leftarrow x\leq 1\\ \dfrac{x^3-x^2-2x}{4-x^2} & \Leftarrow x>2\end{cases}$

12.1. Indique o domínio de $y=f(x)$ e averigúe da existência de assímptotas não verticais ao respectivo gráfico.

12.2. Mostre que $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\dfrac{3}{2}$.

Ficha de Trabalho



- Cálculo Diferencial

12.3. Sabendo que $y = f(x)$ é uma função contínua em $]-\infty;1] \cup]2+\infty[$, defina uma sua extensão que seja contínua em IR.

12.4. Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, caracterize a função derivada da restrição de $y = f(x)$ ao intervalo $]-\infty;1[$.

12.5. Determine a equação reduzida da normal ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto de abcissa -3.

13. Esboce um possível gráfico de uma função real de variável real $y = g(x)$, que satisfaça as seguintes condições.

- $D_g = \mathbb{R}$
- g é contínua em IR\{-2;0}
- $\lim_{x \to -2} g(x) = 3$
- $g'(1) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} [g(x) + x] = 1$
- $g'_e(-2) = -\infty$
- $g(0) = 0$
- g admite a assímptota horizontal y = 0
- $\lim_{x \to -0^+} g(x) = -\infty$

14. $h'(x) = \begin{cases} 12x - 3x^2 & \Leftarrow x < 2 \\ \dfrac{x^2 - 9}{x} & \Leftarrow x > 2 \end{cases}$ é a função derivada de uma função real de variável real, $y = h(x)$, de domínio IR. Sabe-se ainda que $h(x) = -x^3 + 6x^2 - 6, \forall x \in]-\infty; 2]$ e que é descontínua para x = 2.

14.1. Prove que a função $y = h(x)$ é contínua no seu ponto de abcissa 4.

14.2. Indique, justificando, o valor lógico da proposição: $\exists c \in]-1;1[: h(c) = 0$.

14.3. Estude a função $y = h(x)$ quanto à existência de extremantes, sabendo que $\lim_{x \to 0^+} \frac{h(a+2) - h(2)}{a} = +\infty$. Indique também os intervalos de monotonia da função.

14.4. Determine as abcissas dos pontos de inflexão de $y = h(x)$, caso existam.

14.5. Calcule $h''(5)$, utilizando a definição de derivada de uma função num ponto.

14.6. Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de $y = h(x)$, num ponto de abcissa superior a 2, que é perpendicular à recta de equação $(x, y) = \left(-\pi; \frac{\pi}{3}\right) + \lambda(-7;4), \lambda \in \mathbb{R}$, sabendo que a ordenada do ponto de tangencia é 11.

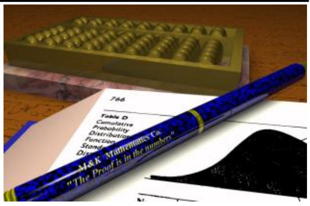
15. Seja $y = h(x)$ a função de domínio $]-\infty;0[\cup [3;+\infty[$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x + 2 & \Leftarrow x < 0 \\ 1 - \sqrt{x - 3} & \Leftarrow x \geq 3 \end{cases}$$

15.1. Determine $h([-2;0[)$.

Ficha de Trabalho

- Cálculo Diferencial



15.2. Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule $h'(4)$. Que pode concluir sobre a continuidade de h no ponto de abcissa 4? Justifique.

15.3. Existe um ponto do gráfico de h, no semi plano definido pela condição $x \geq 3$, no qual a recta normal ao gráfico é paralela à recta de equação $4x - y + 1 = 0$. Determine-o.

15.4. Caracterize uma extensão da função h, que seja contínua em IR.

16. Prove que toda a função polinomial de grau três, admite um ponto de inflexão.

17. Considere a família de funções reais de variável real cuja derivada é definida em IR por $\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$

17.1. Sendo $y = f(x)$ uma qualquer função da família, indique, justificando, o valor de $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h-1) - f(-1)}{h}$

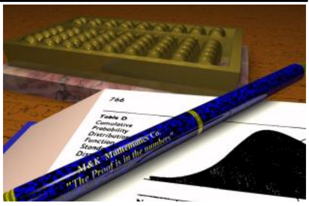
17.2. Mostre que a função g, definida em IR por $\dfrac{x^2}{x^2+1}$, é uma das funções da família.

17.3. Faça um estudo da função $y = g(x)$ quanto ao sentido das concavidades e existência de pontos de inflexão.

17.4. Determine uma equação da normal ao gráfico da função $y = g(x)$, no ponto de abcissa 1.

Ficha de Trabalho

- Cálculo Diferencial



Soluções

Parte I

Questões de escolha múltipla

1B	2D	3C	4B	5C	6C	7D	8D	9A	10C
11B	12A	13.1B	13.2D	13.3B	14B	15D	16C	17D	18.1A
18.2B	19D	20C	21C	22B	23A	24B	25C	26.1D	26.2C
27C	28.1D	28.2B	29D	30B	31D	32B	33B	34C	35D
36C	37D								

Parte II

Questões de resposta aberta

1.1. $\left]-4;+\infty\right[$; $\left]-\infty;1\right[\cup \{2\}$

1.2.1. $(-\infty)$ 1.2.2. Não existe 1.2.3. 1

1.2.4. $(+\infty)$ 1.3. $x = -4$; $y = -x + 3$

1.4. (-3) ; 2 1.5. 0 ; 3 1.7. (-1)

2.1. Sim 2.4. $y = \frac{4}{9}x - \frac{16}{9}$

3.1. Contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-4;2\}$

3.2. $x = -4$ 3.3. $\frac{1}{8}$

3.4.

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 + 12x^2 + 5}{(x+4)^2} \Leftarrow x < 2 \wedge x \neq -4 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+7}} \Leftarrow x > 2 \end{cases}$$

4. $y = 4x + 3$

5.1. Não 5.2. Mon. Cresc. ; não tem extremos

5.4. (-3 ; -11)

6.1.1 –20 6.1.2. $-\frac{4}{9}$

6.1.3. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 6.1.4. $-\frac{5}{16}$

6.3. $y = \frac{1}{2}x + 3$

6.4. Cresc. em $\left]-2;-1\right[$ - Min = 0

7.2. Não existe

8.1. (-2) 8.2. P^{to} de Inflexão – (0 ; -2) ; Conc voltada para baixo em $\left]-1;0\right[$

8.3. $(x;y) = (-2;6) + k(1;-4),\ k \in \mathbb{R}$

9. $h(x) = 18$

10.1. $\dfrac{3x^2(x+2)^2(x^2-2x-2)}{(x-1)^4}$

10.2. $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-2)^2}}$

10.3. $\dfrac{-4\sqrt{x^2+2}}{(4x-1)^2} + \dfrac{x}{(4x-1)\sqrt{x^2+2}}$

11.1. 2 11.2. (-1) ; Assimptota horizontal $y = -1$

11.3. $y = 2x - 1$

12.1. $\left]-\infty;1\right] \cup \left]2;+\infty\right[$; $y = -x + 1$

12.3. $f_1(x) = \begin{cases} f(x) \Leftarrow x \in D_f \\ -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \Leftarrow x \notin D_f \end{cases}$

12.4.
$$\begin{aligned} f_2' : \left]-\infty;-1\right[&\to \Re \\ x &\mapsto -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

12.5. $y = 4x + 14$

14.2. Verdade 14.3. Minimizantes para x=0 e x=3

14.4. Não existem

14.5. $\frac{34}{25}$ 14.6. $y = \frac{7}{4}x + 4$

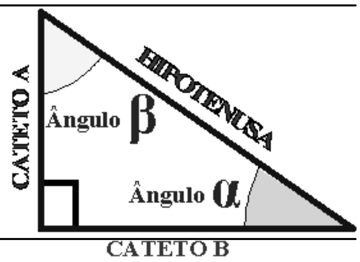
15.1. $\left]1,5;4\right]$ 15.2. $-\frac{1}{2}$; contínua 15.3. (7 ; -1)

15.4. $h_1(x) = \begin{cases} h(x) \Leftarrow x \in D_h \\ -\frac{1}{3}x + 2 \Leftarrow x \notin D_h \end{cases}$

17.1. $-\frac{1}{2}$ 17.3. Pontos de inflexão para $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; Conc. voltada para cima em $\left]-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$

17.4. $y = -2x + \frac{5}{2}$

Ficha de Trabalho



- Trigonometria
  - Exercícios de Revisão

1. Sejam a e b dois ângulos agudos tais que $\frac{2.\cos a - 1}{3} = 0$ e $3 - 4.\operatorname{sen} b = 2$.

   Mostre que $\sqrt{5}.\operatorname{sen} a = 2.\cos b$.

2. Existirá um ângulo agudo α tal que:

   2.1 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$

   2.2 $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \frac{7}{13}$

   2.3 $\cos\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{7}}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{7}}$

3. Os ângulos α e β têm de amplitudes respectivamente 15º e 15 rad. Qual das afirmações é verdadeira:

   A) $\operatorname{sen}\alpha > \operatorname{sen}\beta$ C) $\operatorname{sen}\alpha < \operatorname{sen}\beta$

   B) $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$ D) nenhuma das respostas é correcta

4. Exprima nas razões trigonométricas do ângulo α:

   4.1 $3\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) - 3\operatorname{sen}(\pi + \alpha) + \cos(\frac{7\pi}{2} + \alpha)$

   4.2 $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) - \operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{2} - \alpha).\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$, em função de $\operatorname{sen}\alpha$

   4.3 $\cos^2(\alpha - \frac{3\pi}{2}) + \operatorname{sen}^2(\pi + \alpha)$

   4.4 $\dfrac{2\operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \operatorname{tg}(\pi + \alpha)}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha) - 2\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2} - \alpha)}$

5. Determine o valor exacto das seguintes expressões:

   5.1 sen225º + cos330º

   5.2 tg150º+tg(-240º)+tg(-315º)

   5.3 $\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{4}) \times \cos(\frac{5\pi}{3})}{\operatorname{sen}\pi - \cos(-2\pi)}$

   5.4 $\operatorname{sen}(-\frac{7\pi}{4}) + \cos\frac{11\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{23\pi}{4} - \operatorname{tg}7\pi$

   5.5 2.sen690º-tg225º+tg(-120º)+cos630º

6. Determine:

6.1 senx, sabendo que $\cos x = -\frac{1}{3}$ e $x \in 3^{o}Q$.

6.2 $\sqrt{3}.\text{sen}\alpha - \sqrt{2} \times \frac{1}{\text{tgx}}$, sabendo que $\text{tgx} = -\sqrt{2}$ e $x \in 2^{o}Q$.

6.3 $2.\text{sen}\beta + 3\text{tg}\beta$, sabendo que $\cos\beta = -\frac{3}{5}$ e $\beta \in 3^{o}Q$.

6.4 $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \text{tg}(\pi - \alpha)$, sabendo que $\text{sen}(\alpha - \pi) = \frac{1}{3}$ e $\alpha \in 3^{o}Q$.

7 Considere a função $f(x) = -1 + 2\cos^2 x$:

7.1 Determine o domínio e o contradomínio de f.

7.2 Calcule $f(-\frac{\pi}{3}) + f(\pi)$.

7.3 Estude a paridade de f.

7.4 Sabendo que $\text{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, calcule $f(\alpha)$.

7.5 Determine os zeros de f no intervalo $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

7.6 Calcule a expressão dos maximizantes e minimizantes de f.

8 Considere as funções $f(x) = \text{sen}(3x)$ e $g(x) = -\text{sen}(2x)$.

Determine as abcissas dos pontos onde os gráficos se intersectam e que pertencem ao intervalo $[-\pi; \pi]$.

9 Resolva as seguintes equações trigonométricas:

9.1 $-5\text{sen}\frac{x}{2} = 0$

9.2 $\text{sen}3x = \frac{1}{2}$

9.3 $\text{sen}^2 x - 1 = 0$

9.4 $2\text{sen}^2 x + \text{sen}x = 0$

9.5 $\text{sen}^2 x - 3\text{sen}x + 2 = 0$

9.6 $\text{sen}x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

9.7 $\cos x = -\frac{1}{2}$

9.8 $\text{sen}x + \text{sen}\frac{\pi}{2} = 0$

9.9 $\cos(3x) = -\cos x$

9.10 $\cos(3x) = -\text{sen}x$

9.11 $1 - \cos^2 x = 2\text{sen}x$

9.12 $2\sqrt{3}\text{tg}x - 2 = \frac{1}{\cos^2 x}$

9.13 $\text{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0$

9.14 $\text{tg}^2(2x) - 3 = 0$

9.15 $\text{sen}x = \text{tg}x$

9.16 $\text{sen}^2 x + \text{sen}x.\cos x = 0$

9.17 $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 0$

9.18 $\text{sen}^2 x + 2\text{sen}x.\cos x = 0$

10 Se $\text{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ e $\alpha \in \left]-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right[$, então $\text{tg}\alpha$ tem o valor de:

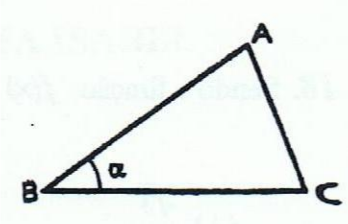
A) $-\frac{3}{4}$ B) $-\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{3}$

11 Seja [ABC] um triângulo isósceles em que $\overline{BA} = \overline{BC}$.

Seja α a amplitude do ângulo ABC.

Mostre que a área do triângulo [ABC] é dada por

$$\frac{\overline{BC}^2}{2} \times \operatorname{sen}\alpha \quad (\varepsilon \in]0;\pi[)$$

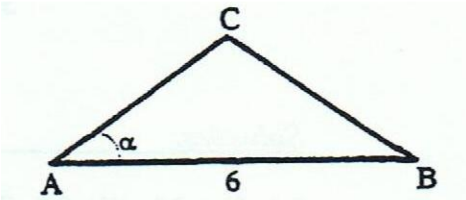


12 A sucessão de termo geral $a_n = \operatorname{sen}^2 n + \cos^2 n$ é:

A) Crescente C) não monótona

B) Decrescente D) constante

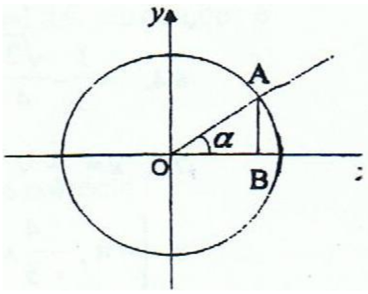
13 Na figura está representado um triângulo isósceles em que $\overline{AC} = \overline{CB}$. A medida $\overline{AB} = 6$ e $\cos\alpha = 0{,}8$, sendo α a amplitude do BAC. No referido triângulo a medida da altura relativa ao lado [AB] é:



A) $\frac{9}{4}$ C) 4

B) $\frac{17}{8}$ D) 2

14 Seja o ângulo α em posição normal no referencial, onde a circunferência representada limita o círculo trigonométrico. Considere o triângulo [AOB] inscrito na circunferência. A área deste triângulo é:



A) $\frac{\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha}{2}$ C) $\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha$

B) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$ D) $2\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha$

15 A equação $\operatorname{sen}(3x) = -\operatorname{sen}x$ possuiu as seguintes soluções:

A) $x = k\pi \vee x = -k\pi, k \in Z$ C) $x = \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

B) $x = \frac{k\pi}{3} \vee x = k\pi, k \in Z$ D) $x = \frac{k\pi}{3}, k \in Z$

16 Das seguintes afirmações indica a verdadeira:

A) $\exists x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[: \operatorname{tg}x > 0$

B) A função co-seno é decrescente no intervalo $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

C) $\forall \alpha : \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$

D) Em $\left]-\frac{3\pi}{2};-\pi\right[$, a função seno é crescente

17 O domínio da função com expressão analítica $\operatorname{sen}x = \operatorname{tg}x$ é:

A) $\{x \in IR : x \neq 90º \wedge x \neq 270º\}$

B) $\{x \in IR : x \neq 90º + 360k, k \in Z\}$

C) $\left\{x \in IR : x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in Z\right\}$

D) $\{x \in IR : x \neq 90º + 180k, k \in Z\}$

18 Sendo a função $f(x) = \operatorname{sen}x.\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$, o valor exacto de $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ é:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B) 0

C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

19 Seja α o ângulo que satisfaz a relação:

$$2.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -1 \wedge \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$$

O ângulo α é tal que:

A) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

C) $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$

Soluções:

2.1 Sim **2.2** Não **2.3** Sim **3** C) **4.1** $\operatorname{sen}\alpha$

4.2 $\operatorname{sen}^3\alpha$ **4.3** $2\operatorname{sen}^2\alpha$ **4.4** $-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{3\cos^3\alpha}$ **5.1** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ **5.2** $\frac{3-4\sqrt{3}}{3}$

5.3 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ **5.4** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-2}{2}$ **5.5** $-2+\sqrt{3}$ **6.1** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **6.2** $\sqrt{2}+1$

6.3 $\frac{12}{5}$ **6.4** $-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}$ **7.1** $D_f = IR$ **7.2** $\frac{1}{2}$ **7.3** Par

7.4 $\frac{3}{5}$ **7.5** $x=\pm\frac{\pi}{4} \vee x=-\frac{3\pi}{4}$

7.6 Maximizantes: $x = k\pi, k \in Z$; Minimizantes: $x = k\pi, k \in Z$

8 $\left\{-\pi;-\frac{4}{5}\pi;-\frac{2}{5}\pi;0;\frac{2}{5}\pi;\frac{4}{5}\pi;\pi\right\}$ **9.1** $x = 2k\pi, k \in Z$

9.2 $x=\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi \vee x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi, k \in Z$ **9.3** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$

9.4 $x=k\pi \vee x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$ **9.5** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$

9.6 $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$ **9.7** $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$

9.8 $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$ **9.9** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \vee x=-\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$

9.10 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi \vee x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k}{2}\pi, k\in Z$ **9.11** $x=k\pi, k\in Z$ **9.12** $x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in Z$

9.13 $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in Z$ **9.14** $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z$ **9.15** $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in Z$

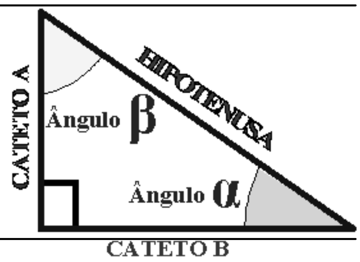
9.16 $x=k\pi \vee x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$ **9.17** Condição impossível

9.18 $x=k\pi \vee x=-0{,}35\pi+k\pi, k\in Z$

10. A **12.** D **13.** A **14.** A **15.** B

16. B **17.** D **18.** A **19.** A

Ficha de Trabalho



- Trigonometria
    - Exercícios de Conclusão

1. Determine as soluções das equações seguintes:

1.1 $\cos x - \text{sen}x = 1$

1.2 $\text{sen}(2x) + \text{sen}x = 0$

1.3 $\cos x + \cos(2x) = 0$

1.4 $2\text{sen}^2 x = 1 - \text{sen}x$

1.5 $\sqrt{3}.\text{sen}x + \cos x = 1$

2. Recorrendo às regras de derivação determine a função derivada em cada um dos seguintes casos:

2.1 $f(x) = x^2 \text{sen}x$

2.2 $f(x) = 5x\cos(3x)$

2.3 $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

2.4 $f(x) = \dfrac{x}{\text{sen}x}$

2.5 $f(x) = \dfrac{1-\text{sen}x}{\cos x}$

2.6 $f(x) = \dfrac{\text{tg}x}{1+x^2}$

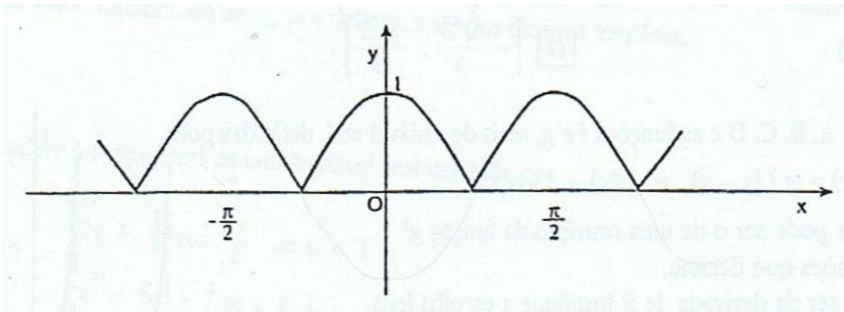
2.7 $f(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2x}$

2.8 $f(x) = (\cos x + \text{sen}x)^2$

2.9 $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen}x\cos x}$

2.10 $f(x) = \dfrac{3}{\cos^2(2x) - \text{sen}^2(2x)}$

3. O gráfico

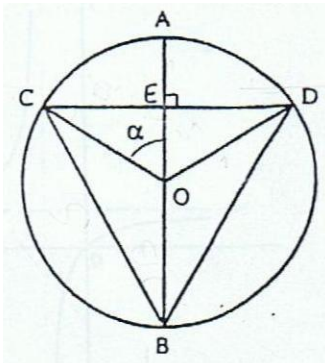


pode ser uma representação geométrica da função f, real de variável real, definida por:

A) $f(x) = |\cos(2x)|$ C) $f(x) = \text{sen}(|2x|)$

B) $f(x) = |\text{sen}x|$ D) $f(x) = \cos|x|$

4. Na figura junta são dados uma circunferência de centro O e raio 1, um diâmetro AB e uma corda CD, perpendicular a esse diâmetro, Designando por α o ângulo, em radianos, AÔC (=AÔD), determine:



4.1 O perímetro do triângulo BCD, em função de α .

4.2 O valor de α para o qual a área do mesmo triângulo tem valor máximo, sabendo que essa área é igual a $\operatorname{sen}(\alpha)[1+\cos(\alpha)]$.

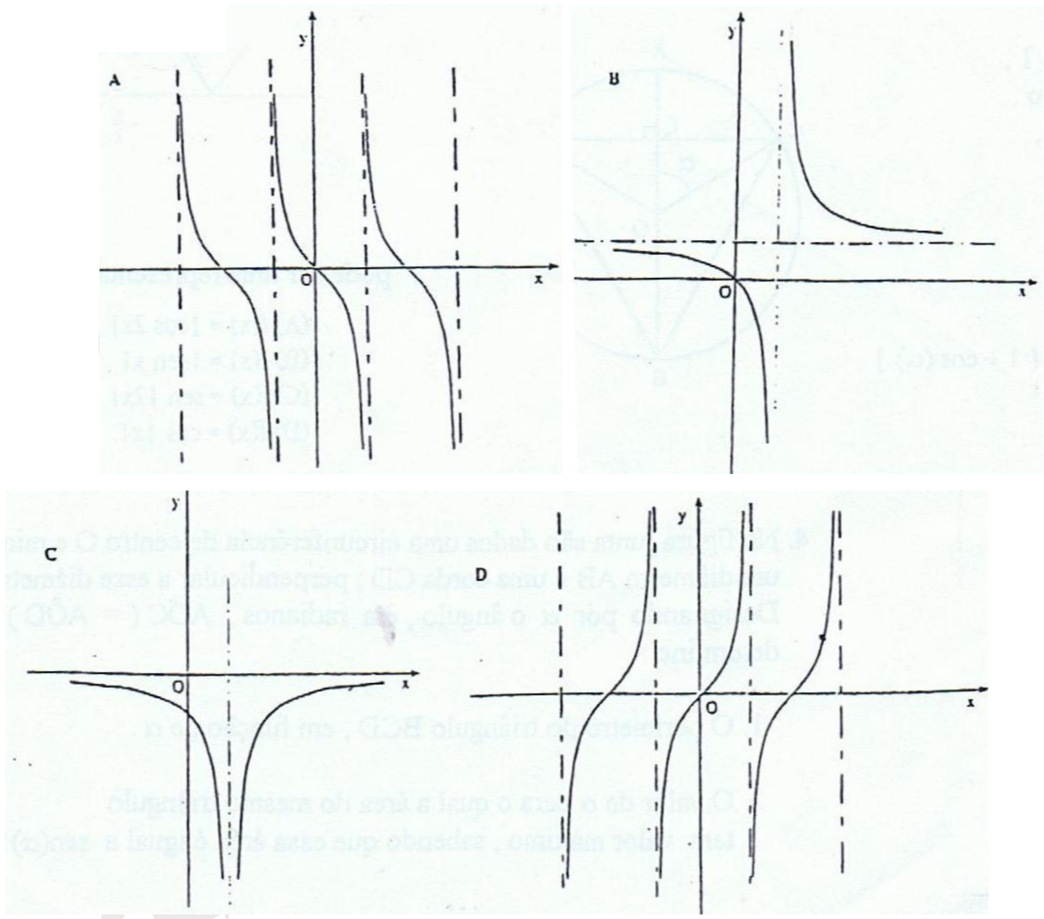
5 Considere os gráficos A, B, C, D e as funções f e g, reais de variável real, definidas por:

$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$; $g(x)=\operatorname{tg}(2x-\pi)$ e $h(x)=2\operatorname{sen}x$

5.1 Algum dos gráficos pode ser o de uma restrição da função g? Justifique as exclusões que decidiu.

5.2 Algum deles pode ser da derivada de f? Justifique a escolha feita.

5.3 Calcule o limite de $\dfrac{g(x)}{x}$ quando x tende para zero.



6 Dadas as funções reais de variável real: $f(t)=\cos^2 t+\cos t$ e g(t)= $t-\pi$

6.1 Sendo $\cos(2a)=-\dfrac{1}{3}$ e $a\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, calcule f(a+$\dfrac{\pi}{2}$).

6.2 Determine, para $t\in[0;2\pi]$, os extremos da função f e classifique-os.

6.3 Qual o contradomínio de f?

7 Considere a função $f(x)=x+\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.

7.1 Prove que a função é impar.

7.2 Prove que a equação $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)=-x$ tem uma só solução no intervalo $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right]$.

7.3 Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

8 Considere a função real de variável real assim definida: $h(x)=1-x+\operatorname{sen}(2x)$

8.1 Calcule, se existir, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)-1}{x}$.

8.2 Estude a monotonia de h no intervalo $[0;\pi]$.

8.3 Mostre que a equação h(x)=0 tem uma única solução x0 em $[0{,}5;2]$.

9 Considere a função real de variável real definida por

$$f(x)=\begin{cases}2x+\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2} & \text{se } x<1\\ x^2-6x+7 & \text{se } x\geq 1\end{cases}\text{, no intervalo } [-5;4].$$

A) O máximo de f é igual a 2 e f não tem mínimo

B) F não tem máximo e o mínimo de f é igual a -2

C) O máximo de f é igual a 2 e o mínimo de f é igual a -2

D) O máximo de f é igual a 2 e o mínimo de f é igual a -10

Soluções:

1.1 $x=\pi+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$ **1.2** $x=k\pi \vee x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$

1.3 $x=\pi+2k\pi \vee x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$

1.4 $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$

1.5 $x=2k\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ **2.1** $2x\,\mathrm{sen}x+x^2\cos x$

2.2 $5\cos(3x)-15x\,\mathrm{sen}(3x)$ **2.3** $\frac{2\mathrm{sen}x}{(1+\cos x)^2}$ **2.4** $\frac{\mathrm{sen}x-x\cos x}{\mathrm{sen}^2x}$ **2.5** $\frac{\mathrm{sen}x-1}{\cos^2 x}$

2.6 $\frac{1+x^2-2x\,\mathrm{sen}x\cos x}{\cos^2 x(1+x^2)}$ **2.7** $\frac{2x\,\mathrm{sen}x-1+\cos(2x)}{2x^2}$ **2.8** $2\cos(2x)$

2.9 $-\frac{\cos(2x)}{\mathrm{sen}^2x\cos^2 x}$ **2.10** $\frac{12\mathrm{sen}(4x)}{\cos^2(4x)}$ **3.** A **4.1** $2\mathrm{sen}\alpha+2\sqrt{2+2\cos\alpha}$

4.2 $\alpha=\frac{\pi}{3}$

5.1 Pelo domínio excluem-se as opções B e C. A opção A é excluída porque a função g é sempre crescente

5.2 $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}<0$, logo só serve a opção C.

5.3 2 **6.1** $\frac{2-\sqrt{6}}{3}$ **6.2** Máximos $f(0)=2; f(\pi)=0; f(2\pi)=2$

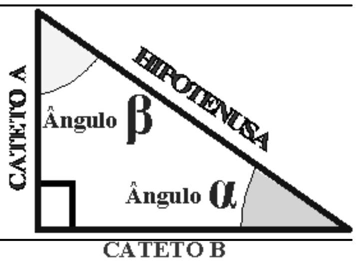
Mínimos $f(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{4}; f(\frac{4\pi}{3})=-\frac{1}{4}$

6.3 $\left[-\frac{1}{4};2\right]$ **7.3** $1+\frac{\pi}{2}$ **8.1** 1

8.2 Crescente: $\left[0;\frac{\pi}{6}\right[;\left]\frac{5\pi}{6};\pi\right]$

Decrescente $\left]\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right[$

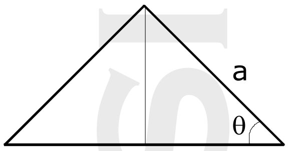
9. D



Ficha de Trabalho

- Trigonometria
  - Exercícios de Exame

1. Numa fábrica de cerâmica produzem-se tijoleiras triangulares. Cada peça é um triângulo isósceles de lado a, constante, como mostra a figura:



a) Mostre que a área de cada peça é dada em função de θ, por:

$$A(\theta) = \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}(2\theta), \quad (0<\theta<\frac{\pi}{2}\ ;\ a>0)$$

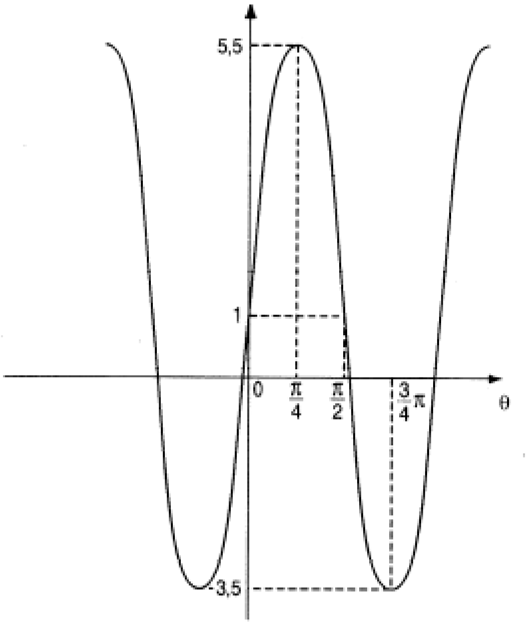
b) Para que valor de θ a área de cada peça é máxima?

c) Justifique que, se o lado <u>a</u> de uma peça de tijoleira for menor que $\sqrt{2}$, a área da peça será inferior a 1, qualquer que seja o valor do ângulo θ.

d) Seja $L=\lim\limits_{\theta\to 0^+}\dfrac{A\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\theta}$ Justifique que não existe logaritmo de L, qualquer que seja a positivo e seja qual for a base do logaritmo.

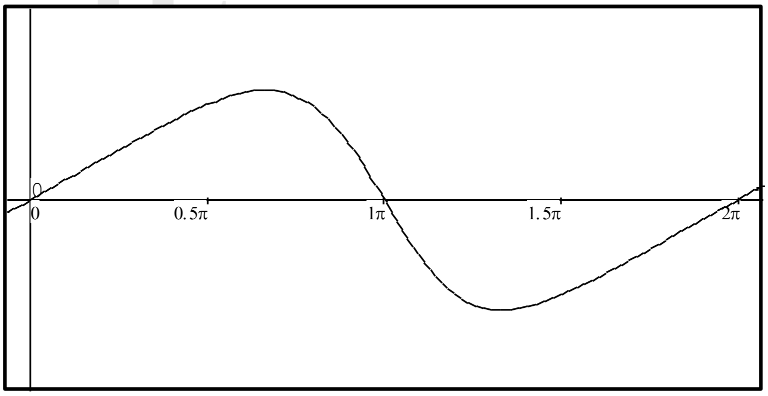
e) Seja $f:\ \theta \to \dfrac{a^2}{2}\operatorname{sen}(2\theta)$, $(\theta\in R,\ a$ constante).

Sabendo que a figura do lado esquerdo representa parte do gráfico de k+f (com k constante), determine os valores de k e de a.



(Exame Nacional 96-1ªchamada)

2. A representação gráfica de uma função g em $[0,2\pi]$ é a seguinte:



a) Quanto à existência de assimptotas do gráfico da função 1/g, no mesmo intervalo, pode afirmar-se que:

(A) Não existem

(B) São as rectas $x=0$, $x=\pi$ e $x=2\pi$.

(C) São as rectas $x=0$ e $y=0$.

(D) São as rectas $x=0$, $x=\dfrac{1}{\pi}$ e $x=\dfrac{1}{2\pi}$.

b) Sabendo que a expressão analítica da função g é $g(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{2+\cos x}$, o contradomínio de g é:

(A) [-1/2,1/2] (B) [-1,1] (C) [$-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$] (D) [$-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$]

(Exame Nacional 96-2ªfase)

3. Seja s a função definida em R por $s(x) = \begin{cases} \text{sen}x & \text{se } x < \pi \\ x - \pi & \text{se } x \geq \pi \end{cases}$. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira:

(A) s é descontínua em $x=\pi$ (B) s tem um mínimo relativo para $x=\pi$

(C) s tem um máximo relativo para $x=\pi$ (D) s tem derivada em $x=\pi$

(Prova Modelo 97)

4. Uma função real de variável real f é tal que f(0)=1. Indique qual das seguintes expressões pode definir a função f:

(A) $\frac{x+2}{x-1}$ (B) $\frac{\ln x}{x+1}$ (C) $\text{tg}(3x+\frac{\pi}{2})$ (D) $2^{\text{sen}x}$

(Exame Nacional 97-1ªchamada)

5. Um navio encontra-se atracado num porto. A distância h, de um dado ponto do casco do navio ao fundo do mar, varia com a maré. Admita que h é dada, em função do tempo x, por h(x)=10-3cos(2x). A distância desse ponto do casco ao fundo do mar, no momento da maré-alta, é

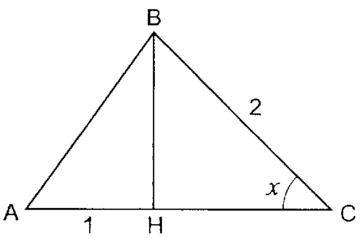
(A) 4 (B) 10 (C) 13 (D) 16

(Exame Nacional 97-2ªfase)

6. Considere a função g definida em $[0,\pi]$ por g(x)=sen x + sen 2x.

a) Determine os zeros da função g.

b) Estude, quanto à existência de assimptotas, a função h definida em $[0,\pi]\backslash\{\frac{\pi}{2}\}$ por $h(x)=\frac{g(x)}{\cos x}$



c) Mostre que, para qualquer $x\in]0,\pi/2[$, g(x) é a área de um triângulo [ABC], em que

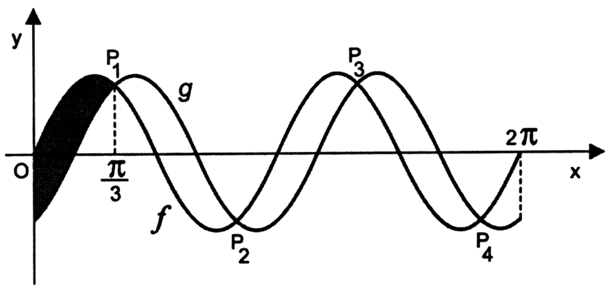
x é amplitude do ângulo BCA;

$\overline{BC}=2$; $\overline{AH}=1$.

[BH] é a altura relativa ao vértice B;

(Prova Modelo 98)

7. Na figura estão as representações gráficas de 2 funções, f e g, de domínio $[0,2\pi]$, definidas por $f(x)=\text{sen}(2x)$ e $g(x)=\cos(2x-\frac{5\pi}{6})$. P_1, P_2, P_3 e P_4 são



os pontos de intersecção dos gráficos de f e de g. A abcissa de P_1 é $\frac{\pi}{3}$.

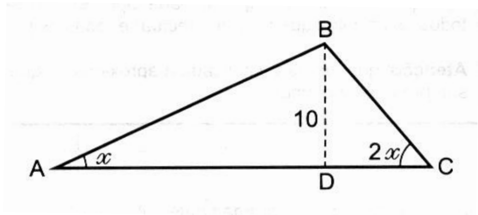
a) Mostre que são perpendiculares as rectas tangentes aos gráficos de f e de g no ponto P_1.

b) Determine as coordenadas de P_2.

c) Defina, por meio de uma condição, a região sombreada, incluindo a fronteira.

(Exame Nacional 99-2ªchamada)

8. Na figura está representado um triângulo [ABC]. Seja $g(x)=\frac{75-25tg^2x}{tgx}$.



a) Mostre que a área de [ABC] é dada por g(x), para qualquer $x\in]0, \frac{\pi}{4}[$.

b) Considere o triângulo [ABC] quando $x=\frac{\pi}{4}$. Classifique-o quanto aos ângulos e quanto aos lados e prove que a sua área ainda é dada por g(x).

(Exame Nacional 99-2ªfase)

9. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen}x = 0$ (B) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen}x = +\infty$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen}x = 1$ (D) Não existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen}x$

(Exame Nacional 00-1ªchamada)

10. No presente ano civil, em Lisboa, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, no dia de ordem n do ano, é dado em horas, aproximadamente, por

$f(n)=12{,}2+2{,}64\ \operatorname{sen}\frac{\pi(n-81)}{183}$, $n\in\{1,2,3,...,366\}$ (o argumento da função seno está expresso em radianos).

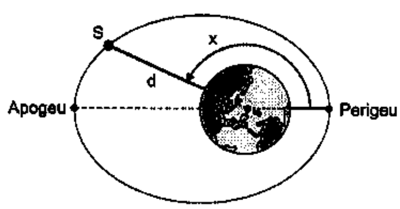
a) No dia 24 de Março, Dia Nacional do Estudante, o Sol nasceu às 6 e meia da manhã. Em que instante ocorreu o pôr do Sol? Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondado às unidades).

Notas: recorde que, no presente ano, o mês de Fevereiro teve 29 dias; sempre que, nos cálculos, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

b) Em alguns dias do ano, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol é superior a 14,7 horas. Recorrendo à sua calculadora, determine em quantos dias do ano é que isso acontece. Indique como procedeu.

(Exame Nacional 00-1ªchamada)

11. Um satélite S tem uma órbita elíptica em torno da Terra, tal como se representa na figura. Tenha em atenção que os elementos nela desenhados não estão na mesma escala. Na elipse, estão

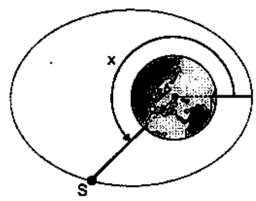


assinalados 2 pontos: o *apogeu*, que é o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra; o *perigeu*, que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra.

O ângulo x, assinalado na figura, tem o seu vértice no centro da Terra; o seu lado origem passa no *perigeu*, o seu lado extremidade passa no satélite e a sua amplitude está compreendida entre 0 e 360 graus.

A distância d, em km, do satélite ao centro da Terra, é dada por $d=\dfrac{7820}{1+0{,}07\cos x}$. Considere que a Terra é uma esfera de raio 6378 km.

a) Determine a altitude do satélite (distância à superfície da Terra) quando este se encontra no *apogeu*. Apresente o resultado em km, arredondado às unidades.



b) Num certo instante, o satélite está na posição indicada na figura. A distância do satélite ao centro da terra é, então, de 8200 km. Determine o valor de x, em graus, arredondado às unidades.

(Exame Nacional 00-2ªchamada)

12. Considere a função h definida em R por h(x) = senx. Qual das seguintes equações pode definir uma recta tangente ao gráfico de h?

(A) $y=2x+\pi$ (B) $y=-2$

(C) $y=\sqrt{2}\,x-9$ (D) $y=x$

(Exame Nacional 00-2ªfase)

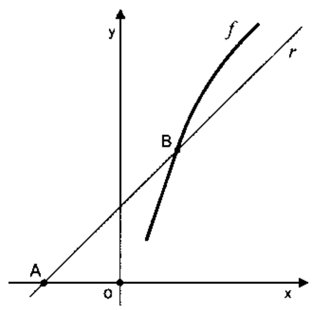
13. Considere a função f, de domínio R, definida por f(x)=2x-cos x

a) Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função f tem, pelo menos, 1 zero, no intervalo $]0,\pi[$.

b) Seja f ' a função derivada de f. Mostre que f '(x)>0, $\forall x\in R$, e justifique que o zero de f, cuja existência é garantida pelo enunciado da alínea anterior, é o único zero desta função.

c) Na figura abaixo estão representadas: parte do gráfico da função f; parte de uma recta r, cuja inclinação é 45^0, que contém o ponto A(-3,0) e que intersecta o gráfico da função f no ponto B.

Recorrendo à sua calculadora, determine a área do triângulo [AOB], onde O designa a origem do referencial. Apresente o resultado arredondado às unidades.



Nota: sempre que, nos valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 1 casa decimal.

14. Indique o valor de $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$

(A) $-\infty$ (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

(Prova Modelo 2001)

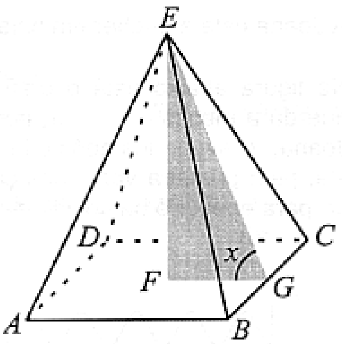
15. Considere a função f, de domínio R, definida por f(x)= $\dfrac{x+3\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\ln(e^x+4)}$

a) Sabe-se que existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e que o seu valor é um número inteiro. Recorrendo à sua calculadora, conjecture-o. Explique como procedeu.

b) Será conclusivo, para a determinação do valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, um método que se baseie exclusivamente na utilização da calculadora? Justifique a sua resposta.

(Prova Modelo 2001)

16. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular.



Sabe-se que: a base da pirâmide tem centro F lado 2; G é o ponto médio da aresta [BC]; x designa a amplitude do ângulo FGE.

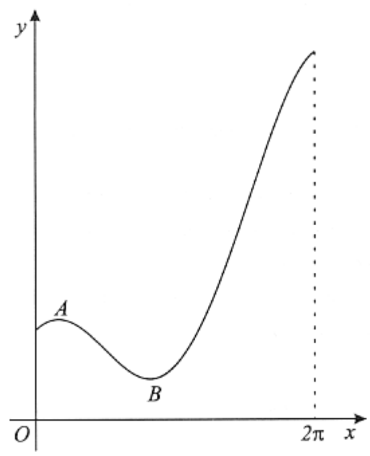
a) Mostre que a área total da pirâmide é dada, em função de x, por A(x)= $\dfrac{4\cos x+4}{\cos x}$, (x$\in$]0, $\dfrac{\pi}{2}$ [)

b) Calcule $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} A(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

(Exame Nacional 1ª chamada 2001)

17. Na figura está representado o gráfico da função f, de domínio [0,2π], definida por f(x)=x+2cosx

A e B são pontos do gráfico cujas ordenadas são extremos relativos de f.



17.1. Sem recorrer à calculadora, resolva as 2 alíneas seguintes.

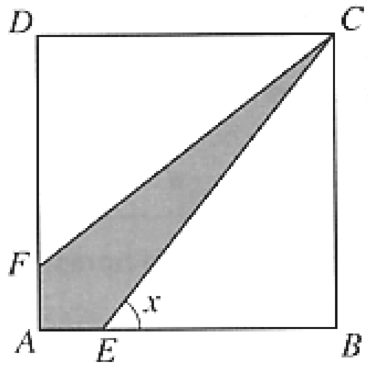
a) Mostre que a ordenada do ponto A é $\dfrac{\pi+6\sqrt{3}}{6}$ e que a do ponto B é $\dfrac{5\pi-6\sqrt{3}}{6}$.

b) Qual é o contradomínio de f?

17.2. Considere a recta tangente ao gráfico de f no ponto A. Esta recta intersecta o gráfico num outro ponto C. Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa do ponto C (apresente o resultado arredondado às décimas). Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

(Exame Nacional 2ª chamada 2001)

18. Na figura está representado um quadrado [ABCD], de lado 1.
O ponto E desloca-se sobre o lado [AB], e o ponto F desloca-se sobre o lado [AD], de tal forma que se tem sempre $\overline{AE}=\overline{AF}$. Para cada posição do ponto E, seja x a amplitude do ângulo BEC ($x\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$).



Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, resolva as 3 alíneas seguintes:

a) Mostre que o <u>perímetro</u> do quadrilátero [CEAF] é dado, em função de x, por

$$f(x)=2-\frac{2}{\operatorname{tg}x}+\frac{2}{\operatorname{sen}x}.$$

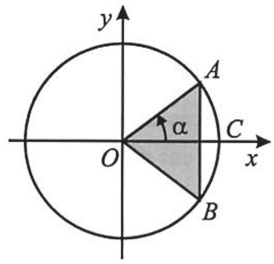
b) Calcule $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

c) Mostre que $f'(x)=\dfrac{2-2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ e estude a função quanto à monotonia.

(Exame Nacional 1ª fase 1ª chamada 2002)

19. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico e um triângulo [OAB].
Os pontos A e B pertencem à circunferência; o segmento [AB] é perpendicular ao semieixo positivo Ox; o ponto C é o ponto de intersecção da circunferência com o semieixo positivo Ox.

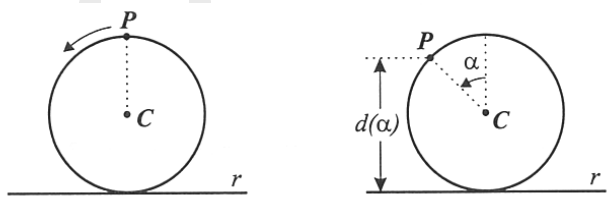
Seja α a amplitude do ângulo COA ($\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$). Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo [OAB], em função de α?



(A) $\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$ (B) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha}{2}$ (C) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha$ (D) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{sen}\alpha}{2}$

(Exame Nacional 1ª fase 2ª chamada 2002)

20. Considere uma circunferência de centro C e raio 1, tangente a uma recta r. Um ponto P começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura. Inicialmente, o ponto P encontra-se à distância de 2 unidades da recta r.



Seja $d(\alpha)$ a distância de P a r, após uma rotação de amplitude α. Qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer nº real positivo α?

(A) $d(\alpha)=1+\cos\alpha$ (B) $d(\alpha)=2+\operatorname{sen}\alpha$ (C) $d(\alpha)=1-\cos\alpha$ (D) $d(\alpha)=2-\operatorname{sen}\alpha$

(Exame Nacional 2ª fase 2002)

21. Considere as funções f e g, de domínio R, definidas por f(x)= $\frac{1}{3}+2e^{1-x}$ e g(x)=2sen x-cos x

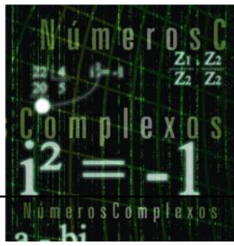
a) Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as 2 alíneas seguintes:

a1) Estude a função f quanto à existência de assimptotas paralelas aos eixos coordenados.

a2) Resolva a equação f(x)=g(π), apresentando a solução na forma ln(ke), onde k representa um nº real positivo.

b) Recorrendo à calculadora, determine as soluções inteiras da inequação f(x)>g(x), no intervalo [0,2π]. Explique como procedeu.

(Exame Nacional 1ª fase 2ª chamada 2002)



Ficha de Trabalho

- Números complexos

Escolha Múltipla

1. Seja $w = 2i - 3 + \sqrt{3}$. Então podemos afirmar que:

A) Re w = 2 e Im w = $3 + \sqrt{3}$ **B)** Re w = $3 + \sqrt{3}$ e Im w = 2

C) Re w = $-3 - \sqrt{3}$ e Im w = 2 **D)** Re w = $-3 + \sqrt{3}$ e Im w = 2

2. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

I. A soma de dois números complexos conjugados é um número real

II. O produto de dois números complexos conjugados é um número real

III. O quociente de dois números complexos conjugados é um número real

A) I e II **B)** II e III **C)** I e III **D)** I, II e III

3. O valor da expressão $\frac{i^2 - i}{3 + i} + i^0$ é igual a:

A) $\frac{-2}{3+i}$ **B)** $\frac{6-2i}{8}$ **C)** $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$ **D)** $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$

4. Em C, o conjunto solução da equação $x^2 + 4x + 5 = 0$ é:

A) $\{-2-2i; -2+2i\}$ **B)** $\{-2; 2\}$ **C)** $\{\ \}$ **D)** $\{-2-i; -2+i\}$

5. Seja z=a+bi um número complexo qualquer. O coeficiente da parte imaginária de $\overline{z}i$ é igual a:

A) a **B)** -a **C)** b **D)** -b

6. Considere o número complexo -1+i. Então, o módulo e um argumento de w são:

A) $|w| = 2$ e arg w=$\frac{\pi}{4}$ **B)** $|w| = \sqrt{2}$ e arg w=$\frac{3\pi}{4}$

C) $|w| = \sqrt{2}$ e arg w=$-\frac{\pi}{4}$ **D)** $|w| = \sqrt{2}$ e arg w=$\frac{\pi}{4}$

7. Sabendo que $-iz = 2\text{cis}\frac{\pi}{4}$, então z é igual a:

A) $z = 2\text{cis}\frac{\pi}{4}$ **B)** $z = 2\text{cis}\frac{3\pi}{4}$ **C)** $z = -2\text{cis}\frac{\pi}{4}$ **D)** $z = 2\text{cis}-\frac{\pi}{4}$

8. O número complexo $z = \frac{i^{246} + i^{18}}{i^3 - i}$ é:

A) Um número imaginário puro negativo

B) Um número imaginário puro positivo

C) Um número real negativo

D) Um número real positivo

9. O número complexo $z=-8+8i$, na forma trigonométrica, é igual a:

A) $z=8\sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **B)** $z=8\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

C) $z=8\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **D)** $z=8\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

10. As soluções de $z^3=\overline{z}$ são:

A) $\{\,0\,\}$ **B)** $\{\,0\,;\,1\,\}$

C) $\{\,-1\,;\,0\,;\,1\,\}$ **D)** $\{\,0, \text{cis}0\,,\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right), \text{cis}\pi\,, \text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\}$

11. Considere o número complexo $z=16\text{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Então:

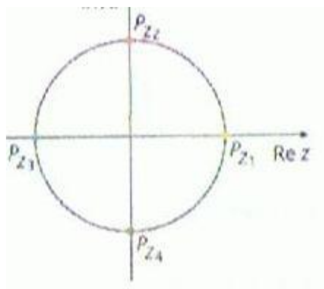
A) $z^3=16$ **B)** $z^{-2}=16$ **C)** $|z|=16$ **D)** $\overline{z}^{\,2}=16$

12. Seja $z=2\text{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Então, z^5 é:

A) Um imaginário puro negativo **B)** Um imaginário puro positivo

C) Um número real negativo **D)** Um número real positivo

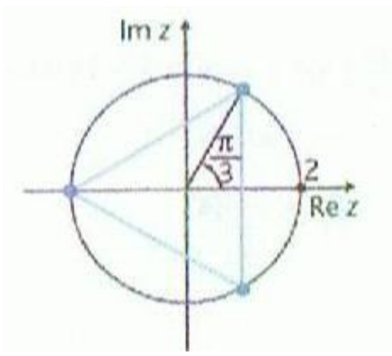
13. Seja w um número complexo diferente de zero, cuja imagem geométrica, no plano complexo, está no 1º quadrante e pertence à bissectriz dos quadrantes impares. Seja $\overline{w}$ o conjugado de w.
Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos, z_1, z_2, z_3 e z_4.



Qual deles pode ser igual a $\frac{w}{\overline{w}}$?

A) z_1 **B)** z_2 **C)** z_3 **D)** z_4

14. Atendendo à figura abaixo, os vértices do triângulo equilátero são os afixos das raízes do número complexo z. Então, z é igual a:



A) $z=2\text{cis}\frac{\pi}{3}$ **B)** $z=8\text{cis}\frac{\pi}{3}$

C) $z=2\text{cis}\pi$ **D)** $z=8\text{cis}\pi$

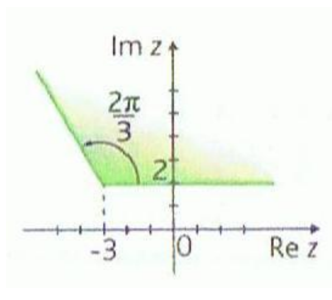
15. A condição que define o conjunto de pontos representado abaixo é:

A) $0\le \arg(z-3+2i)\le \frac{2\pi}{3}$

B) $\arg(z-3+2i)\le \frac{2\pi}{3}$

C) $0\le \arg(z-3-2i)\le \frac{2\pi}{3}$

D) $\arg(z+3-2i)\le \frac{2\pi}{3}$



<u>Questões de Resposta Aberta</u>

1. Resolva, em C, as seguintes equações:

a) $x^2 + 9 = 1$

b) $x^2 + 121 = 0$

c) $x^2 + 2x + 3 = 0$

d) $x^2 - 8x + 25 = 0$

2. Calcule:

a) $(2+3i)+(5-4i)$

b) $(1+i)+(1-i)$

c) $(2-5i)-3i$

d) $2(i-4)-3(4-5i)$

e) $\frac{1}{2}(6-3i)+(\frac{1}{3}+i)$

f) $(\frac{1}{2}+3i)(\frac{1}{2}-3i)$

g) $4(\frac{1}{3}-\frac{i}{2})(\frac{1}{2}-\frac{i}{3})$

h) $(1+2i)^2$

3. Calcule:

a) $\frac{1+i}{i}$

b) $\frac{3-i}{2-i}$

c) $\frac{2+3i}{2i+1}$

d) $\frac{4+5i}{2i-1}$

4. Simplifique as seguintes expressões:

a) i^{25}

b) i^{420}

c) $(2i)^5$

d) $(-10i)^3$

5. Sejam $z = 2+i$ e $w = 1-i$.

a) $z+\bar{z}$

b) $z-\bar{w}$

c) $z^2.w^{-1}$

d) $\frac{w}{z}$

e) $\frac{z}{w}$

6. Escreva na forma $a+bi$.

a) $(4i-2)^{-1}$

b) $(2-2i)^4$

c) $(12-16i)^{\frac{1}{2}}$

7. Resolva, em C, as seguintes equações:

a) $(2+3i).z = 1+i$

b) $(2i).z = (\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)$

c) $\bar{z} = (5-4i).i$

d) $\frac{10}{z} = 5-5i$

e) $z^2 + 4z + 8 = 0$

8. Escreva os seguintes números complexos na forma trigonométrica:

a) $z = 1$

b) $z = i$

c) $z = 2+2i$

d) $z = 2-\sqrt{12}\,i$

e) $z = -3-\sqrt{3}\,i$

f) $z = -12+4\sqrt{3}\,i$

9. Escreva os seguintes Escreva os seguintes números complexos na forma trigonométrica:

a) $z = 3\text{cis}0$

b) $z = 2\text{cis}\dfrac{2\pi}{3}$

c) $z = 5\text{cis}\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)$

d) $z = \text{cis}\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)$

e) $z = 4\text{cis}\pi$

f) $z = \sqrt{3}\text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

10. Considere os números complexos $z = 3\text{cis}\dfrac{2\pi}{3}$ e $w = 2\text{cis}\dfrac{7\pi}{6}$. Calcule:

a) $z.w$

b) $z.(iw)$

c) $\dfrac{w}{z}$

d) w^3

e) $-w.\dfrac{iz}{z^2}$

11. Sendo $z = -2-2i$ e $z = 2\text{cis}\dfrac{\pi}{4}$, calcule:

a) $2z+\overline{z}$

b) $w-\overline{z}$

c) $z.w$

d) $\dfrac{-w.\overline{z}}{z}$

e) $\dfrac{z}{\overline{w}}$

12. Em C, mostre que:

a) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$

b) $\overline{z_1\times z_2} = \overline{z_1}\times\overline{z_2}$

c) $\overline{z_1-z_2} = \overline{z_1}-\overline{z_2}$

d) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

13. Verifique que $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$, para todos os números complexos z_1 e z_2.

Soluções:

Parte 1

1D	2A	3C	4D	5B	6B	7B	8A	9D	10D
11C	12C	13B	14D	15C					

Parte 2

1. a) $\left\{-2\sqrt{2}\,i;2\sqrt{2}\,i\right\}$ **1.** b) $\{-11i;11i\}$ **1.** c) $\left\{-1-\sqrt{2}\,i;-1+\sqrt{2}\,i\right\}$ **1.** d) $\{4+3i;4-3i\}$

2. a) 7-i **2.** b) 2 **2.** c) 2-8i **2.** d) -20+17i

2. e) $\frac{10}{3}+\frac{1}{2}i$ **2.** f) $\frac{37}{4}$ **2.** g) $-\frac{13}{9}i$ **2.** h) -3+4i

3. a) 1-i **3.** b) $\frac{7}{5}+\frac{i}{5}$ **3.** c) $\frac{8}{5}-\frac{i}{5}$ **3.** d) $\frac{6}{5}-\frac{13}{5}i$

4. a) i **4.** b) 1 **4.** c) 32i **4.** d) 1000i

5. a) 4 **5.** b) 1 **5.** c) $-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$ **5.** d) $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$

5. e) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

6. a) $-\frac{1}{10}-\frac{1}{5}i$ **6.** b) -64 **6.** c) 4-2i;-4+2i

7. a) $z=\frac{5}{13}-\frac{1}{13}i$ **7.** b) $z=-\frac{3}{2}i$ **7.** c) $z=4-5i$ **7.** d) $z=1+i$

7. e) $z=-2+2i \vee z=-2-2i$

8. a) z=cis0 **8.** b) $z=\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$ **8.** c) $z=2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ **8.** d) $z=4\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

8. e) $z=2\sqrt{3}\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \vee z=2\sqrt{3}\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ **8.** f) $z=8\sqrt{3}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

9. a) z = 3 **9.** b) $z=-1+\sqrt{3}\,i$ **9.** c) $z=-\frac{5}{2}+5\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **9.** d) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

9. e) z = -4 **9.** f) $z=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

10. a) $z=6\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **10.** b) $z=6\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ **10.** c) $z=\frac{2}{3}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **10.** d) $z=8\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

10. e) $\frac{2}{3}$

11. a) $-6-2i$ **11.** b) $\left(\sqrt{2}+2\right)+\left(\sqrt{2}-2\right)$ **11.** c) $z=-4\sqrt{2}\,i$ **11.** d) $-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$

11. e) $-\sqrt{2}\,i$

Composição Matemática

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Probabilidade Condicionada

Problema:
Uma caixa tem 12 bolas e estão mais 6 bolas fora da caixa. Considera a experiência aleatória que consiste em lançar um dado e, se sair um número ímpar, tiram-se da caixa tantas bolas como o número indicado no dado; se sair um número par, colocam-se na caixa tantas bolas como o número indicado no dado. Sejam *A* e *B* os acontecimentos:

A:"Sai 4 no lançamento"

B:"Ficam pelo menos dez bolas na caixa"

Indica o valor de $p(A|B)$ e, numa pequena composição (cinco a dez linhas), justifica a tua resposta. Começa por indicar o significado de $p(A|B)$, no contexto da situação descrita.

Composição Matemática

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Composição Matemática

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Probabilidade Condicionada

Problema:
Uma turma do 12º ano é constituída por vinte e cinco alunos (quinze raparigas e dez rapazes).
Nessa turma vai ser escolhida uma Comissão para organizar uma viagem de finalistas.
A Comissão será formada por três pessoas: **um presidente**, **um tesoureiro** e **um** responsável pelas **relações públicas**.
Suponha que a escolha dos três elementos vai ser feita por sorteio, da seguinte forma:
- Cada aluno escreve o seu nome numa folha de papel. As vinte e cinco folhas são dobradas e introduzidas num saco. Em seguida, retiram-se do saco, sucessivamente, três folhas de papel. O primeiro nome a sair corresponde ao do presidente, o segundo, ao do tesoureiro e o terceiro, ao do responsável pelas relações públicas.

Sejam A, B e C os acontecimentos:

A: « o presidente é uma rapariga»;
B: «o tesoureiro é uma rapariga»;
C: «a Comissão é formada só por raparigas».

Indique o valor da probabilidade condicionada $P(C|(A \cap B))$ e, numa pequena composição, com cerca de dez linhas, justifique a sua resposta.

Nota: Não aplique a fórmula da probabilidade condicionada. O valor pedido deverá resultar, **exclusivamente**, da interpretação de $P(C|(A \cap B))$, no contexto do problema.

Exame nacional do Ensino Secundário - 2001, 2ª fase

Composição Matemática

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$