



- Introdução ao cálculo de probabilidades

PARTE I

Questões de escolha múltipla

Nas questões seguintes, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

- No lançamento de um dado, o acontecimento “sair um número par de pintas” é um acontecimento:
A. Elementar B. Composto C. Certo D. Impossível
- No lançamento de duas moedas e observando as faces que ficam voltadas para cima, o numero de casos possíveis são:
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- No lançamento de duas moedas, o acontecimento contrário ao acontecimento “sair pelo menos um euro (E)” é:
A. $\{(E, E)\}$ B. $\{(V, V)\}$ C. $\{(E, V), (V, E), (V, V)\}$ D. $\{(E, E), (V, V)\}$
- Considere a experiencia aleatória que consiste em lançar um dado três vezes. O acontecimento contrário de “saírem três faces iguais” é:
A. “Saírem, exactamente, duas faces iguais” B. “Saírem, pelo menos, duas faces iguais”
C. “Saírem, no máximo, duas faces iguais” D. “Saírem três faces diferentes”
- Extrai-se uma carta de um baralho. Considere os acontecimentos: E: “sair espadas” e N: “não sair paus”. O acontecimento $\bar{E} \cap \bar{N}$ é:
A. “Sair paus, ouros ou copas” B. “Sair paus”
C. “Não sair espadas” D. “Sair ouros ou copas”
- Sejam A e B dois acontecimentos de um espaço E, ambos possíveis mas não certos. Sabendo que $A \cap \bar{B} = A$, podemos afirmar que são incompatíveis os acontecimentos:
A. A e B B. A e $\bar{B}$ C. $\bar{A}$ e B D. $\bar{A}$ e $\bar{B}$
- Uma caixa contém quatro bolas numeradas de 1 a 4 e retira-se uma bola. Um acontecimento incompatível mas não contrário do acontecimento “sair número par” é:
A. “Sair divisor de 2” B. “Sair número superior a 2”
C. “Sair divisor de 3” D. “Sair número inferior a 2”

8. Lança-se uma moeda (valor/nacionalidade) quatro vezes ao ar. $\frac{1}{4}$ é a probabilidade de:

- A. "Sair valor nos quatro lançamentos" B. "Sair valor em apenas um lançamento"
C. "Sair valor, exactamente, em dois lançamentos" D. "Sair valor no primeiro lançamento"

9. Os círculos da figura são concêntricos de raios 1 e 2. Escolhendo um ponto do círculo maior, ao acaso, a probabilidade de pertencer a coroa circular é:

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$



10. Sejam A e B dois acontecimentos associados a uma mesma experiência aleatória, tal que: $p(A) = \frac{1}{3}$, $p(B) = \frac{2}{5}$ e $p(A \cup B) = \frac{11}{15}$. Podemos afirmar que A e B são:

- A. Incompatíveis B. Independentes C. Contrários D. $A \cup B = \Omega$

11. Numa caixa existem dez cartões numerados de 1 a 10. Retiram-se dois cartões, sem repor o primeiro antes de retirar o segundo. Qual a probabilidade de tirar um e um só divisor de 8?

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{8}{15}$ C. $\frac{4}{15}$ D. $\frac{16}{45}$

12. De um baralho de 52 cartas, extraem-se duas cartas ao acaso, sucessivamente e sem reposição. Qual é a probabilidade de as duas cartas extraídas serem de copas?

- A. $\frac{13}{52} \times \frac{12}{52}$ B. $\frac{13}{52} \times \frac{13}{52}$ C. $\frac{13}{52} \times \frac{12}{51}$ D. $\frac{13}{52}$

13. Sejam A, B e C três acontecimentos de uma mesma experiência aleatória, incompatíveis dois a dois, em que $A \cup B \cup C = \Omega$. Sabe-se que $p(A) = \frac{1}{3} \times p(B)$ e $p(B) = \frac{1}{2} \times p(C)$. Então $p(A)$ é igual a:

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{2}$

14. Sejam A e B dois acontecimentos independentes de uma mesma experiência aleatória, em que $p(A) = 0,1$ e $p(B|A) = 0,3$. Então $p(A \cap B)$ é igual a:

- A. 0,1 B. 0,3 C. 0,03 D. 0

15. Sejam A e B dois acontecimentos independentes de uma mesma experiência aleatória, em que $\bar{A}p() = 0,3$. Então, $p(A|B)$ é igual a:

- A. 0,3 B. 0,7 C. 0,4 D. 0,1

16. No Desporto Escolar de uma escola estão inscritos 30 alunos em duas modalidades: futebol e basquetebol. Sabe-se que 20 praticam futebol e 16 praticam basquetebol. Escolhido, ao acaso, um aluno do desporto Escolar, qual a probabilidade de ele praticar as duas modalidades?

- A. 0,1 B. 0,2 C. 0,3 D. 0,4

17. Uma escola tem 1200 alunos. Se escolher, ao acaso, um dos rapazes, a probabilidade de ele ser moreno é de 60%. Se escolher ao acaso, um dos alunos, a probabilidade de ele ser um rapaz moreno é de 24 %. Quantos rapazes tem a escola?

- A. 173 B. 300 C. 400 D. 480

18. Considere a seguinte tabela, onde A , $\bar{A}$, D e $\bar{D}$ correspondem a quatro acontecimentos de uma experiência aleatória.

	$\bar{D}$	D
A	40	10
$\bar{A}$	20	30

18.1. A probabilidade de ocorrer A é:

- A. 0,6 B. 0,5 C. 0,4 D. 0,1

18.2. A probabilidade de ocorrer D sabendo que ocorreu A é:

- A. 0,3 B. 0,2 C. 0,4 D. 0,5

19. Numa fabrica, realizou-se um inquérito sobre o absentismo dos seus funcionários. Obtiveram-se os seguintes dados: 70% dos funcionários são homens, em que 10% destes faltam 2 dias ou menos por mês e 30 % das mulheres faltam mais de 2 dias por mês. Se escolher, ao acaso um dos funcionários, a probabilidade de ser mulher e faltar 2 dias ou menos por mês é de:

- A. 21% B. 9% C. 63% D. 7%

PARTE II

Questões de resposta aberta

Indique todos os cálculos que efectuar. Explique os raciocínios e justifique as conclusões.

20. De um baralho de 52 cartas tira-se uma ao acaso. Qual a probabilidade de que a carta seja:

- a) Uma figura?
- b) Dama ou ás?
- c) Rei ou copas?

21. Numa das faces de uma moeda equilibrada colou-se uma etiqueta com o número 1 e na outra face uma etiqueta com o número -1. Lançou-se três vezes ao ar e considerou-se o número da face virada para cima.

a) Defina, em extensão, o espaço de resultados associado a esta experiência.

b) Considere os acontecimentos:

A: “O produto dos três números é negativo”

B: “No primeiro lançamento saiu -1”

C: “Saiu, pelo menos duas vezes, a face -1”

i. Defina, em extensão, os acontecimentos B , $B \cap C$ e $B \setminus C$.

ii. Calcule $p(A)$, $p(A \cap C)$ e $p(C \setminus A)$.

22. Numa certa escola, 85% dos alunos tem telemóvel, 45% tem computador e 35% tem telemóvel e computador.

Escolhido um aluno dessa escola ao acaso, qual a probabilidade de:

a) Não ter computador nem telemóvel?

b) Só ter telemóvel?

23. Um saco contém 6 cartões iguais, 3 com números positivos e 3 com números negativos. Considere a experiência aleatória que consiste em tirar sucessivamente dois cartões do saco e multiplicar os números obtidos.

Averigüe se há mais hipóteses de obter um produto positivo ou negativo, sendo a extracção feita com e sem reposição.

24. Numa empresa, para telefonar para cada um dos sectores existentes, é necessário marcar um número de três algarismos. Os algarismos que constituem estes números são 1, 2 e 3.

a) Quantos números diferentes é possível obter com estes algarismos?

b) Qual a probabilidade de ter escolhido um destes números de telefone ao acaso e este ter:

i. O algarismo 2 no meio?

ii. Todos os algarismos diferentes?

iii. Todos os algarismos iguais?

iv. Os algarismos das centenas e das unidades iguais, mas diferentes do algarismo das dezenas?

25. Na Sala de Estudo de uma Escola Secundária, 70 alunos estão a receber apoio a várias disciplinas. Entre essas disciplinas, constam a Matemática, a Física e a Química.

Sabe-se que:

- 28 têm apoio a Matemática;
- 8 só têm apoio a Física;

- 20 têm apoio a Química;
- 12 têm apoio a Matemática e a Física;
- 10 têm apoio a Física e Química;
- 15 têm apoio a Matemática e a Química;
- 8 têm apoio as 3 disciplinas (Matemática, Física, Química).

a) Esquematize a situação a partir de um diagrama de Venn.

b) Calcule a probabilidade de um dos 70 alunos, escolhido ao acaso, ter apoio:

- Só a Matemática;
- A Matemática ou a Física;
- A Matemática e a Química;
- A Física sabendo que tem apoio a Química.

26. Para preencher o boletim do Totobola, a Diana lança um dado, em que os símbolos 1, X e 2, aparecem repetidos em faces opostas. A Diana resolveu analisar melhor o dado e, ao fim de 100 lançamentos, fez o seguinte registo:

x_i	1	X	2
Frequência absoluta	30	42	28

a) Calcule, em percentagem, o valor da frequência relativa de “sair 1 ou 2” num único lançamento.

b) A Diana pensa que o dado está viciado. Comente a afirmação.

27. Uma geleira de campismo contém três tipos de refrigerantes: limonada, gasosa e laranjada. Sabe-se que a probabilidade de tirar uma limonada é dupla da probabilidade de tirar uma gasosa e a probabilidade de tirar uma laranjada é metade da de tirar uma limonada. A geleira tem 12 limonadas.

a) Calcule a probabilidade de tirar cada um dos refrigerantes.

b) Quantos refrigerantes tem a geleira?

28. Sejam A e B dois acontecimentos de E. Se $p(A) = \frac{p(B)}{2}$ e $2p(A \cup B) = 3p(B)$, prove que A e B são acontecimentos incompatíveis.

29. Prove que se os acontecimentos A, B e C de um mesmo espaço de acontecimentos são incompatíveis dois a dois, então: $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$.

30. Prove que:

a) $p(A) + p(B) \geq p(A \cup B), \forall A, B \subseteq E$

b) $p(A|B) = 1 + \frac{p(\overline{A} \cap \overline{B}) - p(\overline{A})}{p(B)}, \forall A, B \subseteq E \text{ e } p(B) \neq 0$

31. Numa escola do distrito de Coimbra, 120 dos 180 alunos que frequentam o 12º ano são candidatos à realização do exame de Matemática. Dos que se candidataram ao exame, 50 são raparigas e representam metade da população escolar feminina do 12º ano. Escolhendo ao acaso um aluno desta escola, qual a probabilidade de ser um candidato ao exame de matemática, tratando-se de um rapaz?

32. Numa determinada população, a percentagem de homens é 45% e 2% dos homens são portadores de certa doença. A incidência da doença na população feminina é 1%. Qual a percentagem da população que esta infectada por esta doença?

33. Temos um saco com 5 fichas verdes e 3 vermelhas. Retiramos uma ficha do saco e tomamos nota da cor, colocamos de novo a ficha no saco e retiramos nova ficha. Qual é a probabilidade das duas fichas serem vermelhas?

34. Numa caixa há 20 bolas numeradas de 1 a 20, sendo 12 verdes e 8 azuis.

a) Tiram-se duas bolas seguidas, sem as repor. Qual a probabilidade de a primeira ser verde e a segunda azul?

b) Tiraram-se três bolas seguidas, sem as repor. Qual a probabilidade de serem duas azuis e uma verde (sem interessar a ordem)?

35. Lança-se três vezes seguidas um dado com as faces numeradas de 1 a 6. Determine a probabilidade de:

a) A: “no primeiro lançamento sair um 1”

b) B: “sair um e um só 1 nos três lançamentos”

c) C: “saírem dois e só dois 1 nos três lançamentos”

d) D: “obter três vezes o 1 nos três lançamentos”

e) E: “nunca obter o número 1”

36. Um baralho de cartas completo e constituído por 52 cartas, repartidas por 4 naipes: copas, espadas, ouros e paus.

Cada naipe tem 3 figuras rei, dama e valete.

a) Retirando ao acaso 6 cartas de um baralho completo, qual a probabilidade de entre elas haver um e um só rei?

Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

b) De um baralho completo extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas cartas. Sejam E, C e F os acontecimentos:

E: “sair espadas na 1ª extracção”

C: “ sair copas na 2ª extracção”

F: “ sair figura na 2ª extracção”

Sem utilizar a formula da probabilidade condicionada, indique o valor de $p((F \cap C) | E)$.

Numa pequena composição explique o seu raciocínio.

SOLUÇÕES

Parte I

Questões de escolha múltipla

- | | | | | | |
|---------|-------|-------|-------|-------|---------|
| 1. B | 2. D | 3. B | 4. C | 5. B | 6. A |
| 7. D | 8. B | 9. D | 10. A | 11. B | 12. C |
| 13. B | 14. C | 15. B | 16. B | 17. D | 18.1. B |
| 18.2. B | 19. A | | | | |

Parte II

Questões de resposta aberta

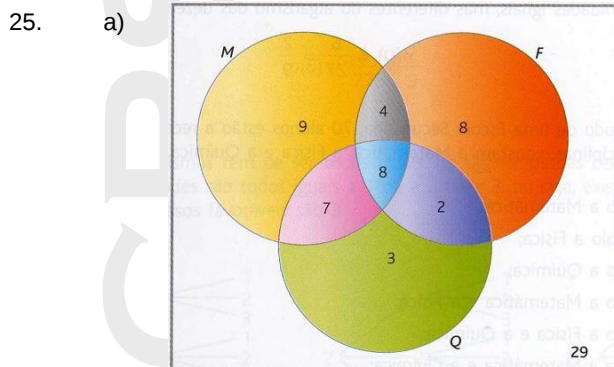
20. a) $\frac{3}{13}$ b) $\frac{2}{13}$ c) $\frac{4}{13}$
21. a) $E = \{(1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,1), (1,-1,-1), (-1,1,1), (-1,-1,1), (-1,1,-1), (-1,-1,-1)\}$
- b)
- i. $B = \{(-1,1,1), (-1,-1,1), (-1,1,-1), (-1,-1,-1)\}$
- $B \cap C = \{(-1,-1,1), (-1,1,-1), (-1,-1,-1)\}$
- $B \setminus C = \{(-1,1,1)\}$
- ii. $p(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $p(A \cap C) = \frac{1}{8}$ $p(A \setminus C) = \frac{3}{8}$

22. a) 5% b) 50%

23. Sem reposição: o produto é mais provável

Com reposição: probabilidade igual

24. a) 27
- b)
- i) $p(A) = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$ iii) $p(C) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$
- ii) $p(B) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$ iv) $p(D) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$



- b)
- i. $p(M \cap \bar{F} \cap Q) = \frac{9}{70}$
- ii. $p(M \cup F) = \frac{19}{35}$
- iii. $p(M \cap Q) = \frac{3}{14}$
- iv. $p(F|Q) = \frac{1}{2}$

26. a) 58%
- b) São poucos lançamentos para se afirmar que o dado está viciado. Tem de se efectuar um número muito elevado de lançamentos para poder afirmar com alguma certeza se o dado está viciado ou não.
27. a) $p(\text{sair limonada}) = \frac{1}{2}$ $p(\text{sair laranja}) = \frac{1}{4}$
- $p(\text{sair gasosa}) = \frac{1}{4}$
- b) $x = 24$

31. 0,875

32. 1,45%

33. $\frac{9}{64}$

34. a) $\frac{24}{95}$

b) $\frac{28}{95}$

35. a) $p(A) = \frac{1}{6}$

d) $p(D) = \frac{1}{216}$

b) $p(B) = \frac{25}{72}$

e) $p(E) = \frac{125}{216}$

c) $p(C) = \frac{5}{72}$

36. a) $\cong 0,336$

b) $\frac{3}{51}$

Ficha de Trabalho

Probabilidade Condicionada
Acontecimentos independentes

Instruções

1. Fez-se um estudo estatístico com 200 automóveis de cilindrada (X) de valores 1000, 1200 e 1600, em que se determinou a duração média (Y) (em milhares de quilómetros) de um conjunto de pneus. O quadro seguinte mostra os valores encontrados:

Cilindrada (X)	A	B	C
	1000	1200	1600
Duração (Y)			
B' : 20	2	16	58
C' : 25	10	42	14
D' : 30	48	6	4

Escolhendo uma destas viaturas à sorte e sabendo que tem 1200 de cilindrada, qual é a probabilidade de que os pneus tenham uma duração de 25 mil km?

2. Um dado perfeito é lançado duas vezes. Sejam A e B os acontecimentos:

A: "No 1º lançamento o nº de pontos da face superior é menor que 3"

B: "No 2º lançamento o nº de pontos da face superior é pelo menos 5"

Calcule a probabilidade de sair no 2º lançamento um nº igual ou superior a 5 sabendo que no 1º o nº de pontos é menor que 3.

3. Uma fábrica de torneiras dispõe de 2 máquinas que fabricam respectivamente 65% e 35% da produção total.

A percentagem de torneiras defeituosas de cada máquina é, respectivamente, 4% e 3%.

Qual a probabilidade de ao escolher uma torneira ao acaso, esta seja:

- Defeituosa?
- Fabricada pela máquina 1, sabendo que é defeituosa?

4. Um indivíduo para se deslocar de casa ao trabalho costuma ir em carro próprio ou de autocarro. Como prefere viajar em carro próprio, escolhe esta opção 80% das vezes. A probabilidade de chegar atrasado ao trabalho é de 18% e, se for em carro próprio, a probabilidade de chegar atrasado é de 12%.

Considere os seguintes acontecimentos:

C : "Viajar em carro próprio"

$\bar{C}$: "Viajar de autocarro"

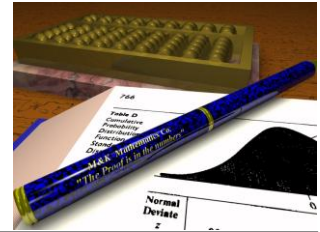
A : "Chegar atrasado ao trabalho"

P : "Chegar ao trabalho à hora exacta"

Calcule: a) $p(A|\bar{C})$ b) $p(P|C)$ c) $p(C|A)$ d) $p(A \cup C)$

Traduza por palavras os acontecimentos das alíneas anteriores

Ficha de Trabalho

Probabilidade Condicionada
Acontecimentos independentes

5. No lançamento de um dado perfeito. Qual é a probabilidade de o número obtido ser 6, sabendo:
 - a. Que se obteve um nº par?
 - b. Que se obteve um nº ímpar?
 - c. Que se obteve um múltiplo de 3?
6. O Heitor frequenta a Escola Secundária da cidade próxima do local onde vive. Diariamente, tem duas possibilidades para ir às aulas: de comboio ou de autocarro. Como prefere o autocarro, 60% das vezes escolhe esse meio de transporte.
Sabendo que a probabilidade de chegar atrasado às aulas é 22% e que a probabilidade de vir de autocarro e chegar atrasado é 12%, calcule a probabilidade de:
 - a. Chegar atrasado sabendo que veio de autocarro.
 - b. Não chegar atrasado e não vir de autocarro.
 - c. Chegar atrasado ou vir de autocarro.
 - d. Vir de autocarro dado que chegou atrasado.
7. Uma pessoa quer enviar um fax a um amigo mas não se lembra qual o último algarismo. Qual é a probabilidade de o fax chegar ao destinatário?
8. Sejam A e B dois acontecimentos independentes tais que:
 - a probabilidade de que ocorram ambas é $1/3$;
 - a probabilidade de que não ocorram algum é $1/6$;
 - $p(A) > p(B)$.
 Determine:
 - a. $p(A)$
 - b. $p(B)$
 - c. $p(A \cup B)$
9. Supondo que a probabilidade de uma pessoa ser morena é 60% e a probabilidade de ter os olhos verdes é 20%, determine a probabilidade de:
 - a. Ser morena e ter olhos verdes;
 - b. Ser morena ou ter olhos verdes;
 - c. Três pessoas serem morenas.
10. Três pessoas são escolhidas ao acaso.
Calcule a probabilidade dos seguintes acontecimentos:
 - a. Nascerem em meses diferentes;
 - b. Nascerem no mesmo mês;
 - c. Só dois nascerem no mesmo mês.

Ficha de Trabalho

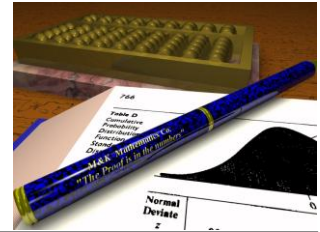
Probabilidade Condicionada
Acontecimentos independentes

11. Segundo as estatísticas da Suécia, a distribuição dos recém-nascidos por sexo e cor dos olhos é a seguinte:
- 17% rapazes de olhos azuis
 - 34% rapazes de olhos castanhos
 - 10% raparigas de olhos azuis
 - 39% raparigas de olhos castanhos
- A Francisca foi à maternidade visitar o filho de uma amiga. O bebé tem olhos azuis, mas não conseguiu saber de que sexo é. Qual é a probabilidade de ser rapaz?
12. Lançaram-se dois dados e verificou-se que os números são diferentes. Determine a probabilidade da soma dos números ser 5.
13. Lanço uma moeda; se sair cara, extraio uma bola da urna com 4 bolas brancas e uma vermelha. Se não sair cara, não extraio bola nenhuma. Qual a probabilidade de obter bola vermelha?
14. Na freguesia de Santo Estevão há 3 partidos políticos: P1, P2 e P3. Efectuou-se um referendo para decidir se se deveria proceder ou não este ano ao restauro da igreja da terra. Os resultados em percentagem, em função do partido em que cada cidadão votou nas últimas eleições são:

	P1	P2	P3	Abstenção
Sim	40%	8%	3%	4%
Não	24%	15%	4%	2%

- a. Qual a percentagem de votação de cada partido nas últimas eleições?
 - b. Qual é a probabilidade de que tomada uma pessoa ao acaso, tenha votado “Não” no último referendo?
 - c. Calcule as seguintes probabilidades:
 1. $p(P1 | \text{Não})$
 2. $p(P3 | \text{Sim})$
 3. $p(\text{Não} | P1)$
 4. $p(\text{Sim} | \text{Abst})$
15. Lança-se um dado perfeito. Se sair número par, tira-se uma bola da urna 1; se sair número ímpar tira-se uma bola da urna 2.
- A urna 1 contém 4 bolas brancas e 2 bolas pretas. A urna 2 contém 5 bolas brancas e 1 bola preta.
- a. Qual é a probabilidade de obter uma bola preta?

Ficha de Trabalho

Probabilidade Condicionada
Acontecimentos independentes

b. Resolva o problema anterior supondo que só a face 5 dá acesso à urna 1; se não sair 5, tira-se a bola da urna 2.

16. Uma urna contém 40 bolas iguais ao tacto, 17 brancas e 23 vermelhas. Todas as bolas se podem abrir e 10 delas contém dentro o nome de um prémio surpresa conforme a tabela:

	Branca	Vermelha
Com surpresa	6	4
Sem surpresa	11	19

a. Saiu uma bola branca. Qual é a probabilidade de que tenha surpresa?

b. Uma pessoa tirou uma bola com surpresa, mas não se lembra da cor da bola. Qual é a probabilidade de que tenha sido branca?

17. Uma loja de brinquedos emprega três mulheres para fazerem embrulhos durante a época de Natal. Raquel embrulha 30% dos presentes e esquece-se de tirar o preço 3% das vezes. Helena embrulha 20% dos presentes e esquece-se de tirar o preço 8% das vezes enquanto que a Joana, que embrulha os restantes, esquece-se de tirar o preço 5% das vezes.

a. Qual é a probabilidade de um presente comprado nessa loja ainda ter o preço?

b. Suponha que tinha ido a essa loja, verificando em casa que o seu presente ainda tinha o preço. Calcule a probabilidade de ter sido embrulhado pela Joana.

Soluções: (quase sempre certas)

1. $\frac{21}{32}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3.a) 0,0365 b) 71% 4.a) 42% b) 88% c) $\frac{8}{15}$

d) 88,4% 5.a) $\frac{1}{3}$ b) 0 c) 50% 6.a) 20% b) 30% c)

70%

d) 55% 7. $\frac{1}{10}$ 8.a) b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{5}{6}$ 9.a) 12% b) 68%

c) 21,6% 10.a) $\frac{55}{72}$ b) $\frac{1}{144}$ c) $\frac{33}{144}$ 11. $\frac{17}{27}$ 12. $\frac{5}{15}$ 13. $\frac{1}{10}$

14.a) $p(P1)=64\%$ $p(P2)=23\%$ $p(P3)=7\%$ b) 45%

14.c) 1. $\frac{8}{15}$ 2. $\frac{3}{55}$ 3. $\frac{3}{8}$ 4. $\frac{2}{3}$ 15.a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{7}{36}$ 16.a) $\frac{6}{17}$ b) $\frac{3}{5}$

17.a) 5% b) 50%

Ficha de Trabalho

- Probabilidade Condicionada
- Exercícios de Exame



Instruções

1. Uma caixa contém cinco bolas brancas e cinco bolas pretas, indistinguíveis ao tacto. Tiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

Considere os seguintes acontecimentos:

B_1 : “a bola retirada em primeiro lugar é branca”

B_2 : “a bola retirada em segundo lugar é branca”

Qual o valor da probabilidade condicionada $P(B_2 | B_1)$?

- A) $\frac{1}{2} \times \frac{4}{9}$ B) $\frac{1}{2} \times \frac{5}{9}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{5}{9}$

2. Seja A um acontecimento possível, cuja probabilidade é diferente de 1. Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A | A)$?

- A) 0 B) 1 C) $p(A)$ D) $[p(A)]^2$

3. Seja E o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset E$ e $B \subset E$. Tem-se que:

$$p(A \cap B) = 10\%$$

$$p(A) = 60\%$$

$$p(A \cup B) = 80\%$$

Qual o valor da probabilidade condicionada $p(A | B)$?

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$

4. O João utiliza, por vezes, o autocarro para ir de casa para a escola.

Seja A o acontecimento: “João vai de autocarro para a escola”.

Seja B o acontecimento: “O João chega atrasado à escola”.

Uma das igualdades abaixo indicadas traduz a seguinte afirmação:

“Metade dos dias em que vai de autocarro para a escola, o João chega atrasado.”

Qual é essa igualdade?

- A) $p(A \cap B) = 0,5$ B) $p(A \cup B) = 0,5$
C) $p(A | B) = 0,5$ D) $p(B | A) = 0,5$

5. Um estudo feito a uma certa marca de iogurtes revelou que:

- Se um iogurte está dentro do prazo de validade, a probabilidade de estar estragado é 0,005;
- Se um iogurte está fora do prazo de validade, a probabilidade de estar estragado é 0,65.

Ficha de Trabalho

- Probabilidade Condicionada
- Exercícios de Exame



Considere que, num certo dia, uma mercearia tem dez iogurtes dessa marca, dos quais dois estão fora de prazo.

Escolhendo, ao acaso, um desses dez iogurtes, qual é a probabilidade de ele estar estragado?

6.

- 6.1. Seja S o conjunto dos resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam E_1 e E_2 dois acontecimentos possíveis ($E_1 \subset S$ e $E_2 \subset S$).

Prove que $p(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}) = 1 - p(E_1) \times p(E_2|E_1)$.

- 6.2. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas: espadas, copas, ouros e paus.

De um baralho completo extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas.

Qual é a probabilidade de pelo menos uma das cartas extraídas não ser do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Nota: se o desejar, utilize a igualdade referida na alínea anterior; neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos E_1 e E_2 , no contexto da situação apresentada.

7. O AUTO-HEXÁGONO é um stand de vendas de automóveis. Efectuou-se um estudo sobre as vendas de automóveis nesse stand, o qual revelou que:

- 15% dos clientes compram automóvel com alarme e rádio;
- 20% dos clientes compram automóvel sem alarme e sem rádio;
- 45% dos clientes compram automóvel com alarme (com ou sem rádio).

Um cliente acaba de comprar um automóvel.

- 7.1. A Marina, empregada do stand, que nada sabia das preferências desse cliente e não tomou conhecimento do equipamento do automóvel que ele tinha comprado, apostou que esse automóvel estava equipado com rádio, mas não tinha alarme.

Qual é a probabilidade da Marina acertar? Apresente o resultado na forma de percentagem.

- 7.2. Alguém informou depois a Marina de que o referido automóvel vinha equipado com alarme. Ela apostou, então, que o automóvel também tinha rádio.

Qual é a probabilidade de a Marina ganhar esta nova aposta? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Soluções:

1. C) 2. B) 3. C) 4. D)

5. 0,134 6.2. 16/17 7.1. 35% 7.2. 1/3

Ficha de Trabalho

- Cálculo de probabilidades ○ Triângulo de Pascal
- Análise combinatória ○ Binómio de Newton

Escolha Múltipla

1. Cinco amigos vão dar um passeio num automóvel de 5 lugares. Sabendo que só três deles podem conduzir, o número de formas diferentes de ocuparem os lugares durante o passeio é dado por:

A) ${}^3A_1 \times {}^4A_2$ **B)** ${}^5C_4 \times {}^3C_1$ **C)** ${}^3C_1 \times {}^4A_4$ **D)** ${}^3C_1 \times {}^4C_4$
2. Numa turma há 10 rapazes e 15 raparigas. Sorteiam-se dois para representar a turma num concurso. A probabilidade de o par sorteado ser constituído por duas raparigas é cerca de:

A) 33% **B)** 13% **C)** 35% **D)** 15%
3. Uma urna contém 6 bolas brancas e 4 pretas. Tiram-se ao acaso, 3 bolas da urna. A probabilidade de serem 2 de uma cor e outra de cor diferente, é aproximadamente:

A) 80% **B)** 45.7% **C)** 75.1% **D)** 71%
4. No totoloto são sorteados 6 números entre 1 e 49 e obtém-se prémio desde que, numa aposta de 6 números se acertem pelo menos 3. A probabilidade de que uma aposta seja premiada é de, aproximadamente:

A) 44% **B)** 87% **C)** 98% **D)** 2%
5. Dos 100 candidatos que responderam a um anúncio para preencher as três vagas existentes numa empresa, $\frac{1}{4}$ são mulheres. A probabilidade de que sejam seleccionadas duas (e só duas) mulheres é:

A) $\frac{{}^{100}C_3 \times {}^{75}C_2}{{}^{100}C_3}$ **B)** $\frac{75 \times {}^{25}C_2}{{}^{100}C_3}$ **C)** $\frac{{}^{25}C_2}{{}^{100}C_3}$ **D)** $\frac{{}^{25}C_2 + 75}{{}^{100}C_3}$
6. O número de anagramas diferentes, com ou sem significado, da palavra PARABOLA e a probabilidade de que, escolhido um deles ao acaso, ele comece e termine em A são, respectivamente:

A) 720 e 64,3% **B)** 4320 e 32,1% **C)** 720 e 10,7% **D)** 4320 e 1,8%
7. Ao analisar os resultados de um inquérito feito a 500 alunos e uma escola, verificou-se que 160 praticam futebol, 120 praticam andebol e 250 não praticam nenhuma destas duas modalidades. Ao escolher-se ao acaso um dos alunos da escola, 44% é a probabilidade de que:

A) Pratique apenas uma das modalidades
B) Pratique pelo menos uma das modalidades
C) Não pratique qualquer modalidade
D) Pratique ambas as modalidades

Ficha de Trabalho

- Cálculo de probabilidades ○ Triângulo de Pascal
- Análise combinatória ○ Binómio de Newton



8. Dum baralho de 52 cartas, extrai-se uma mão de 5. A probabilidade que essa mão contenha pelo menos um ás é:

A) $1 - \frac{{}^{48}C_5}{{}^{52}C_5}$ B) $\frac{{}^4C_1 \times {}^{51}C_4}{{}^{52}C_5}$ C) $4 \times \frac{{}^{48}C_4}{{}^{52}C_5}$ D) $1 - \frac{{}^{51}C_4}{{}^{52}C_5}$

9. Realizou-se um estudo estatístico relativamente ao absentismo dos alunos de uma escola, tendo-se chegado aos seguintes resultados:

- 38% dos alunos faltaram pelo menos um dia.
- 35% dos alunos faltaram pelo menos 2 dias.
- 30% dos alunos faltaram pelo menos 3 dias.
- 21% dos alunos faltaram 4 dias ou mais.

Ao escolher-se, aleatoriamente, um aluno dessa escola, as probabilidades de que tenha “faltado zero dias” e de que tenha “faltado exactamente 2 dias” são respectivamente:

- A) 6% e 5% B) 6% e 3% C) 62% e 5% D) 62% e 3%

10. Um grupo de 10 amigos, que incluem a Rita e o Baptista, possuem 5 bilhetes para irem ao cinema. Quantos agrupamentos diferentes se podem formar para ir ver o filme, sabendo que o Baptista só vai se a Rita for, mas que a Rita vai mesmo que o Baptista não vá.

- A) 252 B) 196 C) 126 D) 182

11. A Rita e o Baptista fazem parte do grupo que vai ver o filme. De quantos modos se podem sentar os 5 amigos, atendendo a que o Baptista e a Rita pretendem ficar juntos?

- A) 120 B) 24 C) 48 D) 12

12. Colocaram-se numa urna onze bolas indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 11. Tirou-se uma bola da urna e verificou-se que o respectivo número era ímpar. Essa bola não foi reposta na urna. Tirando, ao acaso, outra bola da urna, a probabilidade do número desta bola ser ímpar é:

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{5}{11}$ D) $\frac{6}{11}$

13. Quantos números de 4 algarismos, todos diferentes, é possível formar com os elementos do conjunto $\{0;1;2;3;4;5\}$?

- A) ${}^6A_4 - {}^5A_3$ B) 6A_4 C) $5 \times {}^5C_3$ D) 6A_3

14. O Ambrósio comprou um arquivador vertical com 10 posições para guardar os seus 10 CDs. Sabendo que 5 são de música, 3 de dados e 2 são de filmes, de quantos modos diferentes podem ser arrumados, mantendo juntos os do mesmo tipo?

- A) 6 B) 1440 C) 8640 D) 3628800

Ficha de Trabalho

- Cálculo de probabilidades
- Análise combinatória
- Triângulo de Pascal
- Binómio de Newton



- 15.** No totoloto são sorteados 6 números entre 49 e obtém-se prémio desde que, numa aposta de 6 números se acertem pelo menos 3. A probabilidade de que uma aposta não seja premiada é de:

A) $1 - \frac{{}^6C_3 \times {}^{46}C_3}{{}^{49}C_6}$
B) $\frac{{}^6C_0 + {}^6C_1 + {}^6C_2}{{}^{49}C_6}$

C) $\frac{{}^6C_0 \times {}^{43}C_6 + {}^6C_1 \times {}^{43}C_5 + {}^6C_2 \times {}^{43}C_4}{{}^{49}C_6}$
D) $\frac{{}^6C_3 \times {}^{43}C_3}{{}^{49}C_6}$

- 16.** A quantidade de números pares, de 4 algarismos diferentes, que é possível escrever com os elementos do conjunto $\{1;2;3;4;5;6;7\}$, pode ser expressa por:

A) ${}^7A'_4$
B) 7A_4
C) ${}^3C_1 \times {}^4A_3$
D) ${}^3A_1 \times {}^6A_3$

- 17.** O código de um cofre é constituído por uma sequência de 3 algarismos (0-9). A probabilidade de 2 e apenas 2 deles serem repetidos é igual a:

A) 90%
 B) 37%
 C) 9%
 D) 27%

- 18.** Uma caixa possui 40 bombons de 2 tipos diferentes, uns com recheio de licor e outros com recheio de amêndoa, na proporção de 2 para 3. Considere os seguintes acontecimentos:

B1: “o 1º bombom retirado é de licor”;

B2: “o 2º bombom retirado é de amêndoa”.

O valor da probabilidade condicionada $p(B2 | B1)$ é:

A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{24}{39}$
C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{16}{40} \times \frac{24}{39}$

- 19.** Considerando o alfabeto português, quantas são as matrículas actualmente em uso em Portugal em que 3 e apenas 3 dos dígitos são iguais e as letras são diferentes, como por exemplo 01-AB-00?

A) 4.554.000
 B) 45.540
 C) 182.160
 D) 2.550.240

- 20.** O número de anagramas diferentes, com ou sem significado, que é possível formar com as letras da palavra LIMITE é:

A) 360
 B) 720
 C) 180
 D) 120

- 21.** Um casal pretende ter 3 filhos. Admitindo que a probabilidade de nascer rapaz é igual à de nascer rapariga, a probabilidade do casal ter dois rapazes e uma rapariga é de:

A) $\frac{1}{8}$
B) $\frac{2}{3}$
C) $\frac{3}{8}$
D) $\frac{1}{2}$

Ficha de Trabalho

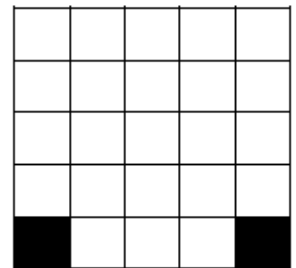
- Cálculo de probabilidades ○ Triângulo de Pascal
- Análise combinatória ○ Binómio de Newton



22. A Joana levou seis livros para casa da avó, onde ia passar uma temporada de férias: dois do José Saramago, um de Sophia de Mello Breyner Andresen e três de Carl Sagan. Decidiu que a ordem por que iria lê-los seria aleatória. A probabilidade de que os livros do José Saramago sejam o primeiro e o último a serem lidos é, aproximadamente:

- A) 3,33% B) 33,3% C) 6,67% D) 16,67%

23. Num quadro como o da figura, pretendem-se dispor as 23 letras do alfabeto português.



1. O número de modos distintos de o fazer, ficando as cinco vogais todas na 1ª linha, é expresso por:

- A) $23!$ B) ${}^{23}C_5$
 C) ${}^{23}A_5$ D) $P_5 \times {}^{18}A_{18}$

2. A probabilidade de que a última linha contenha só vogais é:

- A) $\frac{{}^5C_3}{23!}$ B) $\frac{{}^5C_3 \times 18!}{23!}$ C) $\frac{{}^5A_3 \times 20!}{23!}$ D) $\frac{{}^5A_3 \times 18!}{23!}$

24. Nascer na primavera, no verão, no Outono ou no inverno são acontecimentos equiprováveis. A probabilidade de que, num grupo de cinco amigos, três deles façam anos na primavera é de:

- A) $\frac{1}{4}$ B) ${}^5C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2$ C) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2$ D) ${}^5C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3$

25. Para análise da fidelidade de uma máquina de parafusos recolheu-se uma amostra que continha 128 parafusos defeituosos, o que permitiu estimar que a probabilidade de um parafuso produzido pela máquina ser defeituoso é de 13,47%. O número de parafusos da amostra foi cerca de:

- A) 17 B) 950 C) 7050 D) 890

26. A e B representam dois quaisquer acontecimentos possíveis de uma dada experiência aleatória. Das afirmações seguintes:

1. Se A e B são acontecimentos incompatíveis, então eles são contrários.
2. Se $p(A | B) = p(A)$, então $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$
3. Se A e B são acontecimentos independentes, então $A \cap B \neq \emptyset$.

- A) Apenas II é válida B) Apenas II e III são válidas
 C) Apenas I e III são válidas D) São todas válidas

Ficha de Trabalho



- Cálculo de probabilidades
- Análise combinatória
- Triângulo de Pascal
- Binômio de Newton

27. Na população portuguesa sabe-se que a probabilidade de nascer rapaz é 52%. Relativamente às famílias com 4 filhos, a probabilidade de 3 (e apenas 3) deles serem rapazes é:

- A)** $0,52^3$ **B)** $4 \times 0,52^3$ **C)** $4 \times 0,52^3 \times 0,48$ **D)** $0,52^3 \times 0,48$

28. Numa moeda viciada a probabilidade de obter “face” é tripla da de obter “coroa”. A probabilidade de obter exactamente 3 vezes “face” em 8 lançamentos é:

- A)** ${}^8\text{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{3}{2}\right)^5$ **B)** ${}^8\text{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^8$ **C)** ${}^8\text{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^3$ **D)** ${}^8\text{C}_5\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^5$

29. A soma de todos os elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 8^5 . O maior elemento da linha seguinte é:

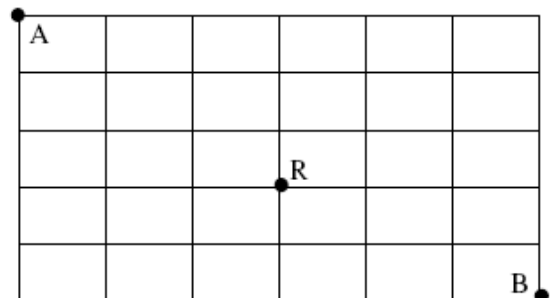
- A)** 11.440 **B)** 6.450 **C)** 12.870 **D)** 352.716

30. ${}^{2001}C_{101} - {}^{2000}C_{101}$ é igual a:

- A)** $^{2001}\text{C}_{100}$ **B)** $^{2000}\text{C}_{1900}$ **C)** $^{2000}\text{C}_{102}$ **D)** $^{2000}\text{C}_{101}$

31. O número de percursos diferentes entre A e B, passando por R, e efectuando apenas deslocamentos para baixo e para a direita, é:

- A) ${}^6C_3 + {}^5C_2$
- B) ${}^{11}C_5$
- C) ${}^6C_3 \times {}^5C_3$
- D) ${}^{11}C_6 - ({}^6C_3 \times {}^5C_2)$



32. A soma de todos os elementos de 2 linhas consecutivas do triângulo de Pascal é 3072. O terceiro elemento da primeira delas é:

- A) 10** **B) 45** **C) 55** **D) 120**

33. Considere três linhas consecutivas do triângulo de Pascal, das quais se reproduzem alguns elementos:

.....	3432	<i>a</i>	<i>c</i>	
.....	6435	<i>b</i>		
.....	11440			

O valor de c é:

- A) 3003** **B) 2002** **C) 5005** **D) 6435**

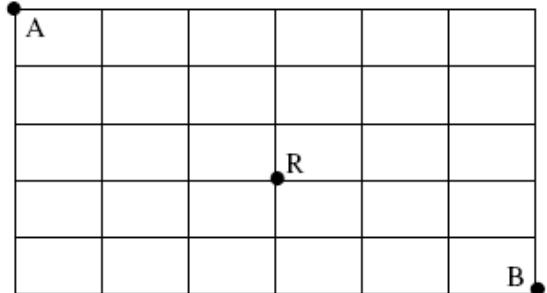
Ficha de Trabalho

- Cálculo de probabilidades ○ Triângulo de Pascal
- Análise combinatória ○ Binómio de Newton



34. O número de percursos diferentes entre A e B, **não passando** por R, e efectuando apenas deslocamentos para baixo e para a direita, é:

- A) ${}^6C_3 + {}^5C_2$
 B) ${}^{11}C_5$
 C) ${}^6C_3 \times {}^5C_3$
 D) ${}^{11}C_6 - ({}^6C_3 + {}^5C_2)$



35. Na tabela seguinte está representada uma distribuição de probabilidade. O valor de a é:

- A) 0,8 ou -0,9 B) -0,9
 C) 0 D) 0,8

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{a}{10}$	0,28	a^2

36. Acabou o tempo de um jogo de basquetebol, e uma das equipas está a perder por um ponto, mas tem ainda direito a três lances livres. O jogador que vai lançar concretiza, em média, 60% dos lances livres que efectua e que cada lance livre concretizado corresponde a um ponto. Qual a probabilidade de conseguir ganhar a partida?

- A) 64,8% B) 36% C) 21,6% D) 60%

37. A soma dos números de uma determinada linha do triângulo de Pascal é 2048. O maior dos números da linha seguinte é:

- A) 462 B) 924 C) 792 D) 729

38. ${}^{2000}C_{51} - {}^{1999}C_{50}$ é igual a:

- A) ${}^{2000}C_{50}$ B) ${}^{1999}C_{51}$ C) ${}^{2000}C_{51}$ D) ${}^{1999}C_{50}$

39. Das afirmações seguintes:

(I) $p \cdot {}^nC_p = n \cdot {}^{n-1}C_{p-1}$

(II) ${}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \dots + {}^nC_{n-1} = 2 \cdot (2^{n-1} - 1)$

- A) Apenas I é válida B) I e II são ambas válidas
 C) Apenas II é válida D) Nem I nem II são válidas

40. Indique qual das equações seguintes é equivalente à equação $(x-1)^4 = 6x^2 - 4x^3$.

- A) $x^4 + 8x^3 + 4x + 1 = 0$ B) $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$
 C) $x^4 + 4x^2 + 1 = 0$ D) $x^4 - 4x + 1 = 0$

41. O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x} - x\right)^{10}$ é:

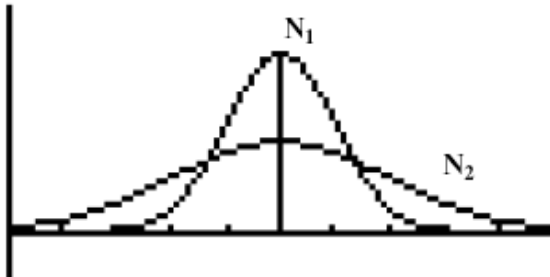
- A) -126 B) 252 C) -252 D) $252 \cdot x^5$

Ficha de Trabalho

- Cálculo de probabilidades
- Análise combinatória
- Triângulo de Pascal
- Binómio de Newton



42. Na figura ao lado estão representadas duas curvas de distribuição normal, N_1 e N_2 , com a mesma média e desvios padrão, respectivamente, σ_1 e σ_2 . Podemos afirmar que:



- A) $\sigma_1 > \sigma_2$
- B) $\sigma_1 < \sigma_2$
- C) $\sigma_1 = \sigma_2$
- D) Não é possível relacionar os desvios padrão

43. Das seguintes afirmações apenas uma é FALSA. Identifique-a.

- A) Se numa dada experiência A e B são acontecimentos contrários, então $p(A \cap B) = 0$
- B) Quaisquer que sejam os acontecimentos A e B, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- C) Num lançamento de dois dados cúbicos equilibrados, é maior a probabilidade de obter “um 1 e um 2” que a de obter “duplo 6”
- D) Seja X uma variável estatística que segue uma lei normal $N(50;8)$. Então a $p(X < 42)$ é cerca de 15,87%.

Questões de Desenvolvimento

1. Num envelope colocaram-se 8 cartões indistinguíveis. Cada cartão tem escrito um número, sendo 4 dos números positivos e os restantes negativos. Tiram-se simultaneamente 2 cartões, ao acaso. Há maior probabilidade de que o produto dos dois números extraídos seja positivo ou negativo? Justifique.
2. Num dado viciado, sabe-se que a probabilidade de sair cada face é directamente proporcional ao seu valor. Calcule a probabilidade de, num lançamento, sair número impar de pontos.
3. Considere os conjuntos $N=\{1,2,3,4,5\}$, $V=\{a,e,i,o,u\}$ e $G=\{\phi,\sigma,\Omega,\triangle,\infty\}$.
 - 3.1 Quantas aplicações é possível definir de N em V
 - 3.1.1 Se não efectuarmos qualquer restrição.
 - 3.1.2 Que sejam bijectivas.
 - 3.1.3 Cujo contradomínio seja $\{a,e,i\}$
 - 3.2 Quantas aplicações é possível definir de N em G
 - 3.1.1 Se não efectuarmos qualquer restrição.
 - 3.1.2 Que sejam injectivas.
 - 3.3 Quantos subconjuntos de G é possível formar com pelo menos 2 elementos, mas não mais de 4? Qual é a probabilidade de um desses subconjuntos, escolhido ao acaso, conter ϕ ?

Ficha de Trabalho

- Cálculo de probabilidades
- Análise combinatória
- Triângulo de Pascal
- Binómio de Newton



4. De entre 10 professores e 30 alunos vão ser escolhidas 20 pessoas para uma visita de estudo. Sabendo que o número de professores terá de ser ou 4 ou 5, de quantas maneiras se pode fazer a escolha?
5. De um baralho suprimiram-se várias cartas. Entre as que restaram, registam-se as seguintes probabilidades de ser extraídas:
- $p(\text{Rei}) = 0,15$
 - $p(\text{Ouros}) = 0,3$
 - $p(\text{Carta que não seja nem Rei nem Ouros}) = 0,6$
- 5.1. Está, entre as cartas que ficaram o rei de ouros? Em caso afirmativo qual a probabilidade de, ao extrair aleatoriamente uma carta, ele ser o extraído?
- 5.2. Quantas cartas ficaram no baralho?
6. Numa reunião estão 24 representantes de 8 países, 3 por país. Vão ser sorteados 6 para integrar uma comissão.
- 6.1. Qual a probabilidade dos sorteados pertencerem a apenas 2 países?
- 6.2. Sabendo que Portugal está representado, qual a probabilidade de pelo menos um dos portugueses integrar a comissão?
- 6.3. Determine quantas comissões diferentes é possível formar, atendendo a que em cada uma delas é designado um presidente, um vice-presidente e um secretário.
7. Num festival de natação, decidiu-se organizar uma estafeta de 4 x 100 metros, em que cada equipa participa com 4 atletas. O clube “Barbatana Dourada” vai participar na prova, dispondo para formar a equipa, de dez atletas masculinos e sete femininos.
- 7.1. Quantos conjuntos diferentes é possível constituir para formar a equipa deste clube?
- 7.2. Escolhendo os elementos da equipa por sorteio, qual a probabilidade da equipa integrar, pelo menos, um atleta do sexo masculino? E de integrar, no mínimo, três atletas do sexo feminino?
- 7.3. Formada a equipa, ficou esta constituída por dois rapazes e duas raparigas. Por questões técnicas deve ser uma rapariga a realizar o primeiro percurso. De quantas formas diferentes se pode organizar a equipa?
- 7.4. Ao todo vão participar na prova seis clubes, apresentando o clube organizador da competição três equipas diferentes (cinco clubes com uma equipa cada, e um clube com três equipas). A colocação das equipas pelas 8 pistas da piscina é feita por sorteio. De quantos modos diferentes podem os clubes ser distribuídos? (A troca de duas equipas do mesmo clube não origina uma distribuição diferente).
- 7.5. Qual a probabilidade de que as três equipas do clube organizador, fiquem colocadas em três das quatro pistas centrais?

Ficha de Trabalho

- Cálculo de probabilidades
- Análise combinatória
- Triângulo de Pascal
- Binómio de Newton



8. Numa moeda viciada, sabe-se que a probabilidade de obter “escudo” é $\frac{5}{3}$ da probabilidade de obter “face”. Calcule a probabilidade de, em cinco lançamentos desta moeda, obter exactamente duas faces.
9. No andebol cada equipa entra em jogo com sete jogadores. Certo clube treinou dezoito elementos, três guarda-redes, cinco “pontas”, sete “centrais” e três “pivots”.
- 9.1. Quantas equipas diferentes, deste clube, é possível formar, sabendo que o treinador quer sempre em campo um guarda redes, dois e só dois pontas e não mais que dois pivots?
- 9.2. Sabe-se que os remates efectuados da ponta, têm 40% de probabilidade de resultar em golo. Se durante determinado jogo foram efectuados onze desses remates, qual a probabilidade de, com eles, ter obtido exactamente cinco golos?
10. Uma pessoa tem de tomar diariamente, à mesma refeição, 2 comprimidos de vitamina C e um de vitamina A. Por lapso, misturou todos os comprimidos no mesmo frasco. Os comprimidos têm igual aspecto exterior, sendo 15 de vitamina A e 25 de vitamina C.
- 10.1. Ao retirar simultaneamente 3 comprimidos do frasco, de quantas formas diferentes o pode fazer de modo que sejam todos do mesmo tipo de vitamina?
- 10.2. Ao tomar 3 dos comprimidos existentes no frasco, qual a probabilidade de cumprir as indicações do médico?
11. Um grupo de jovens de uma associação recreativa, constituído por 13 rapazes e 17 raparigas, duas delas irmãs, decidiu decorar um recinto de que dispõem para aí organizarem os seus convívios. Para tal começaram por eleger uma comissão de 5 elementos que devia coordenar os trabalhos.
- 11.1. Quantas comissões diferentes é possível designar?
- 11.2. Qual a probabilidade de:
- 11.2.1. a comissão ser constituída por elementos do mesmo sexo?
- 11.2.2. a comissão integrar pelo menos um rapaz?
- 11.2.3. as duas irmãs fazerem parte da comissão?
- Depois de constituída, a comissão ficou composta pelo André, pelo Bruno, pela Carla, pela Dina e pela Eva. Por uma questão de organização interna decidiram que deviam eleger um presidente, um tesoureiro, um secretário e dois vogais sem funções diferenciadas.
- 11.3. De quantos modos diferentes é que a comissão designada se pode organizar?
- 11.4. Qual a probabilidade do presidente ser um rapaz?

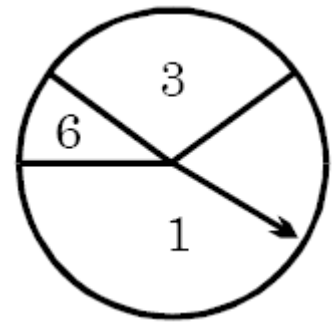
Ficha de Trabalho

- Cálculo de probabilidades
- Análise combinatória
- Triângulo de Pascal
- Binómio de Newton



11.5. Concordaram então que o presidente devia ser um rapaz enquanto o tesoureiro e o secretário deviam ser raparigas. De quantos modos diferentes é que, nestas condições, se podem organizar?

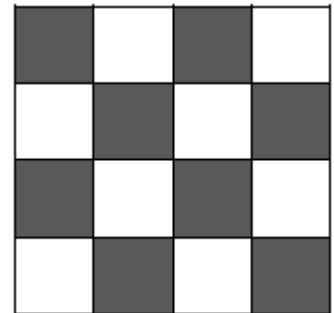
12. Um concurso consiste em fazer rodar o ponteiro de uma roleta como a representada na figura, sendo atribuído um prémio sempre que o concorrente obtiver pontuação “6”, o que tem 10% de probabilidade de ocorrer. Por outro lado fica isento de pagar se obtiver “3” e paga a sua participação se o seu resultado for “1”.



Sabe-se que a probabilidade de obter “1” é dupla da de obter “3”.

- 12.1.** Qual a amplitude do sector circular que permite não pagar a participação ainda que não conceda qualquer prémio?
- 12.2.** Se um dos convivas decidir jogar dez vezes, qual a probabilidade de obter exactamente 4 prémios?

13. Num tabuleiro com 4 linhas e 4 colunas, pretendem-se colocar 8 peças de um jogo de xadrez, 4 peões brancos (indistintos entre si) e um bispo, um cavalo, uma torre e o rei pretos.



- 13.1.** De quantos modos diferentes pode ser efectuada a distribuição das peças pelo tabuleiro?
- 13.2.** Determine a probabilidade de, ao distribuir as peças aleatoriamente, pelo menos uma das diagonais ficar preenchida?

14. Num curso da área de Economia há 24 alunos e 8 professores. Para determinada finalidade foi necessário organizar uma comissão composta por 4 alunos e 2 professores.

- 14.1.** Quantas comissões diferentes é possível organizar?
- 14.2.** O José e a Ana são dois dos alunos. Se os elementos da comissão forem sorteados, qual a probabilidade de fazerem ambos parte da comissão?
- 14.3.** Dos 24 alunos, 9 são do sexo masculino. Qual a probabilidade da comissão integrar pelo menos uma aluna?
- 14.4.** Escolhidos os seis elementos que compõem a comissão, há necessidade de eleger um presidente, um tesoureiro e um relator. Tendo em atenção que o presidente terá que ser um professor e o relator um dos alunos, de quantos modos diferentes pode ser organizada a comissão?

Ficha de Trabalho

- Cálculo de probabilidades
- Análise combinatória
- Triângulo de Pascal
- Binómio de Newton



15. A Feita uma sondagem entre a população estudantil de Coimbra, concluiu-se que 62% dos estudantes ouvem, frequentemente, a Rádio Universidade, 39% a T.S.F. e que 21% não costuma ouvir qualquer daquelas estações emissoras. Escolhido aleatoriamente um estudante, determine a probabilidade dele ouvir...

15.1. ... pelo menos, uma das estações de rádio referenciadas.

15.2. ... ambas as estações.

15.3. ... apenas uma das estações.

15.4. ... apenas a T.S.F..

16. Num a bolsa com bolas não se sabe quantas há, nem de que cores são.

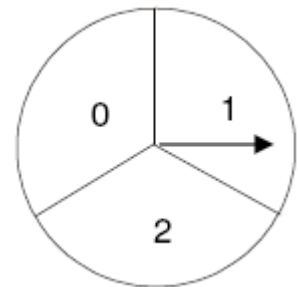
Experiência: fizeram-se 400 extracções de uma bola, com reposição, e saiu 252 vezes bola azul, 28 vezes bola branca e 120 vezes bola verde.

16.1. Podemos assegurar que dentro da bolsa só há bolas azuis, brancas e verdes? Justifique.

16.2. Atendendo aos dados fornecidos indique, justificando, qual a probabilidade de, numa próxima extracção, sair bola verde.

16.3. Suponha agora que na bolsa há dez bolas. De acordo com os dados fornecidos indique quantas bolas verdes se prevê que haja na bolsa.

17. Um jogo de feira, consiste no lançamento de um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e em fazer rodar uma roleta como a representada na figura. A pontuação de cada jogador será o produto das 2 pontuações obtidas. O jogador cuja pontuação seja zero não terá qualquer prémio, receberá 10 € se obtiver pontuação superior a 7 e receberá 2,5 € nos restantes casos.



17.1. Determine a probabilidade de, numa jogada, se obter pontuação igual a 9. Classifique esse acontecimento.

17.2. Elabore uma tabela de distribuição de probabilidades da variável “prémio ganho”.

17.3. O preço de cada aposta está fixado em 5 €. Será o jogo justo para o jogador? Justifique a sua resposta explicando sucintamente o seu raciocínio.

18. Num baralho com 52 cartas extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas. Qual a probabilidade de as duas cartas tiradas ao acaso

18.1. serem do mesmo naipe;

18.2. ser, pelo menos, uma copa;

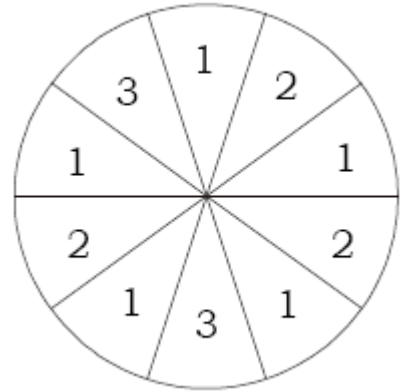
18.3. a primeira ser preta e a segunda de paus.

Ficha de Trabalho

- Cálculo de probabilidades
- Análise combinatória
- Triângulo de Pascal
- Binómio de Newton



19. Um jogo consiste em accionar uma roleta como a representada na figura e, de seguida, retirar uma esfera de um saco com o número correspondente à pontuação obtida na roleta. O saco 1 contém seis bolas azuis, três brancas e uma verde, o saco 2, quatro azuis, quatro brancas e duas verdes e o saco 3 tem três bolas azuis, quatro brancas e três verdes. O apostador que extraia bola verde terá um prémio de 5 €, se extrair bola branca de 3 € e à bola azul corresponde um prémio de 1 €.



- 19.1.** Mostre que as probabilidades de ganhar 5 € e 1 € são 17 % e 48 %, respectivamente.
- 19.2.** O proprietário do jogo estima que, por mês, sejam realizadas 1000 apostas, o que lhe permitirá obter um lucro de 1120 €. Qual o preço que ele pratica por aposta?
- 19.3.** Um par de namorados decidiu jogar a meias; ele gira a roleta e ela extrai a bola do saco. Ela não reparou na roleta nem viu o número do saco de onde extraiu a bola que foi verde. Qual a probabilidade de ter saído número 3 na roleta?
- 20.** As empresas Aeroalfa, Aerobeta e Aerodelta repartem entre si os voos domésticos da Matelândia; as suas cotas de mercado são de 50%, 30% e 20%, respectivamente. A taxa de pontualidade dos voos da Aeroalfa é de 65%, da Aerobeta de 85% e da Aerodelta de 95%.
- 20.1.** Qual a percentagem de voos domésticos da Matelândia que cumprem o horário?
- 20.2.** Um passageiro está a apresentar uma reclamação pelo facto de o seu voo ter chegado com mais de uma hora de atraso. Qual a probabilidade de ele ter viajado na Aerobeta?
- 21.** No final de 1999, um comerciante grossista seleccionou os seus quinze melhores clientes ao longo do ano, para entre eles sortear uma passagem de ano no Rio de Janeiro, outra em Londres e uma terceira na Madeira.
- 21.1.** De quantos modos diferentes podem ser atribuídos os prémios?
- 21.2.** O Sr. Asdrúbal possui 3 estabelecimentos entre os quinze seleccionados. Qual a probabilidade de pelos menos uma das suas lojas ser sorteada? Apresente o resultado na forma de dízima com aproximação às milésimas.
- 21.3.** Das quinze lojas participantes no sorteio, 60% são da zona da grande Lisboa. Sabendo que as duas primeiras viagens foram atribuídas a lojas dessa região, qual a probabilidade da terceira viagem sair a uma loja doutra região?
- 22.** Sejam A e B dois acontecimentos independentes do espaço dos acontecimentos de uma experiência aleatória. Prove que A e $\bar{B}$ também são independentes.
- (Note que $A \cap \bar{B} = A \setminus (A \cap B)$ e que se $B \subset A$ então $p(A \setminus B) = p(A) - p(B)$)

Ficha de Trabalho

- Cálculo de probabilidades
- Análise combinatória
- Triângulo de Pascal
- Binómio de Newton



- 23.** Para garantir o anonimato dos candidatos a um emprego, uma empresa de consultoria atribui a cada um deles um código alfanumérico que obedece às seguintes regras:
- Tem 3 algarismos, seguidos de 4 letras, 2 algarismos e uma letra.
 - A letra final é A, C, M, N ou S, consoante a área de residência do candidato.
 - Os 2 algarismos que precedem a letra final são a idade do candidato e são rejeitados todos os candidatos com 40 ou mais anos, bem como os com menos de 18 anos.
 - O grupo de 4 letras tem sempre 3 consoantes e uma vogal.
 - O 1º algarismo não pode ser zero.
- 23.1.** Calcule o número máximo de códigos que obedecem a estas regras. (23 letras e 10 algarismos)
- 23.2.** Para preenchimento de 3 vagas, passaram a primeira fase do concurso 13 candidatos, dois dos quais irmãos.
- 23.2.1.** Supondo que todos têm, na fase seguinte, igual probabilidade de ser escolhidos, de quantos modos diferentes pode ser feita essa escolha?
- 23.2.2.** Qual a probabilidade de pelo menos um dos irmãos vir a obter emprego?
- 24.** Numa turma de 20 alunos, 12 raparigas e 8 rapazes, vai ser eleita uma comissão constituída por três elementos: presidente, tesoureiro e secretário.
- 24.1.** Quantas comissões diferentes é possível eleger?
- 24.2.** Quantas são as comissões em que o presidente e o tesoureiro são de sexos diferentes?
- 24.3.** Qual a probabilidade de, pelo menos um rapaz, fazer parte da comissão?
- 24.4.** Sabendo que para presidente foi eleito um rapaz, qual a probabilidade dos outros dois elementos da comissão serem raparigas?
- 25.** Numa corrida de cavalos, participam 15 conjuntos jóquei – montada. Serão atribuídos prémios de valor diferente aos três primeiros classificados. Curiosamente, dois dos jóqueis são pai e filho.
- 25.1.** De quantos modos diferentes se pode obter a lista ordenada dos três primeiros classificados?
- 25.2.** Supondo a ordem de chegada aleatória, qual a probabilidade da competição ser ganha pelo cavalo n.º 5?
- 25.3.** Sabendo que a competição foi ganha pelo cavalo n.º 11, qual a probabilidade dos outros 2 prémios também serem atribuídos a cavalos com número ímpar?

Ficha de Trabalho

- Cálculo de probabilidades
- Análise combinatória
- Triângulo de Pascal
- Binómio de Newton



25.4. Um patrocinador decidiu sortear, entre os 15 jóqueis, 5 viagens. Qual a probabilidade de pai e filho serem ambos sorteados? E pelo menos um deles?

26. No desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^{15}$ determine, caso exista, o termo independente de x .

27. Determine o termo independente de x , no desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^6$.

28. No desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)^{10}$:

28.1. Determine, caso exista, o termo de grau 2.

28.2. A soma dos coeficientes binomiais.

28.3. A soma dos coeficientes numéricos.

29. No desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x} + \frac{x^2}{a}\right)^6$, determine o termo independente de x .

Ficha de Trabalho

- Cálculo de probabilidades
- Análise combinatória

- Triângulo de Pascal
- Binómio de Newton

**Soluções:****Parte 1**

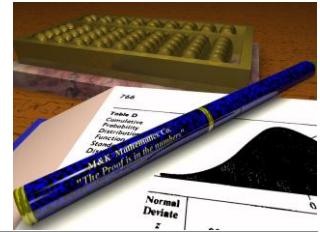
1C	2C	3A	4D	5B	6C	7A	8A	9C	10D
11C	12A	13A	14C	15C	16D	17D	18B	19C	20A
21C	22C	23.1D	23.2C	24B	25B	26B	27C	28C	29C
30B	31C	32B	33B	34D	35D	36A	37B	38B	39B
40D	41C	42B	43B						

Parte 2

1. Negativo	2. 42,9%	3.1.1. 3125	3.1.2. 120
3.1.3. 150	3.2.1. 7776	3.2.2. 720	4. 69 628 376 790
5.1. 0,05	5.2. 20	6.1. $2,08 \times 10^{-4}$	6.2. 59,68%
6.3. 16 151 520	7.1. 2380	7.2. 98,5% ; 16,2%	7.3. 12
7.4. 6720	7.5. 7,1%	8. 34,33%	9.1. 6090
9.2. 0,2207	10.1. 2755	10.2. 0,4555	11.1. 142 506
11.2.1. 5,2%	11.2.2. 95,7%	11.2.3. 2,3%	11.3. 60
11.4. 40%	11.5. 12	12.1. 108°	12.2. 1,1%
13.1. 21 621 600	13.2. 7,7%	14.1. 297 528	14.2. 2,2%
14.3. 98,8%	14.4. 32	15.1. 79%	15.2. 22%
15.3. 57%	15.4. 17%	16.1. Não	16.2. 0,3
16.3. 3	17.1. Impossível	17.2. $p(0) = \frac{1}{3}; p(2,5) = \frac{1}{2}; p(10) = \frac{1}{6}$	
17.3. Não, o preço justo seria 2,92€		18.1. $\frac{4}{17}$	18.2. $\frac{15}{34}$
18.3. $\frac{25}{204}$	19.2. 3,5€	19.3. 35,3%	20.1. 0,77
20.2. 19,6%	21.1. 2730	21.2. 0,516	21.3. $\frac{6}{13}$
23.1. 11 547 360 000	23.2.1. 286	23.2.2. 42,3%	24.1. 6840
24.2. 3456	24.3. 80,7%	24.4. 38,6%	25.1. 2730
25.2. 6,67%	25.3. 23,1%	25.4. 9,5% ; 57,1%	26. -3003
27. 60	28. 1. $180x^2$	28.2. 1024	28.3. 59049
29. $\frac{15}{a^2}$			

Ficha de Trabalho

- Exercícios de análise combinatória de exame

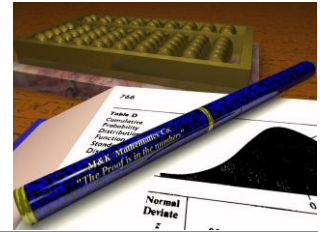


Instruções

- Uma turma de uma escola secundária tem 27 alunos, 15 raparigas e 12 rapazes. O delegado de turma é um rapaz. Pretende-se constituir uma comissão para organizar um passeio. A comissão deve ser formada por 4 raparigas e 3 rapazes. Acordou-se que um dos 3 rapazes da comissão será necessariamente o delegado de turma.
 - Quantas comissões diferentes se podem constituir?
 - Admita que os 7 membros da comissão, depois de constituída, vão posar para uma fotografia, colocando-se uns ao lado dos outros.
Supondo que eles se colocam ao acaso, qual a probabilidade de as raparigas ficarem todas juntas?
Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.
- O código de um cartão multibanco é uma sequência de quatro algarismos, como por exemplo, 0559.
 - Quantos códigos diferentes existem com um e só um algarismo zero?
 - Imagine que um amigo seu vai adquirir um cartão multibanco. Admitindo que o código de qualquer multibanco é atribuído ao acaso, qual é a probabilidade de o código desse cartão ter os quatro algarismos diferentes?
- Um fiscal do Ministério das Finanças vai inspeccionar a contabilidade de sete empresas, das quais 3 são clubes de futebol profissional. A sequência segundo a qual as sete inspecções vão ser feitas é aleatória.
Qual é a probabilidade de que as três primeiras empresas inspeccionadas sejam exactamente os três clubes de futebol?
Apresente o resultado na forma de percentagem arredondada às unidades.
- Considere todos os números pares com cinco algarismos.
Quantos destes números têm exactamente 4 algarismos ímpares?
A) $5 \times^5 C_4$ B) 5^5 C) $5!$ D) $5 \times^5 A_4$
- Lançam-se simultaneamente dois dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6 e multiplicam-se os dois números saídos.
A probabilidade do acontecimento “o produto dos dois números saídos é 21” é:
A) 0 B) $\frac{1}{36}$ C) $\frac{1}{18}$ D) $\frac{21}{36}$

Ficha de Trabalho

- Exercícios de análise combinatória de exame



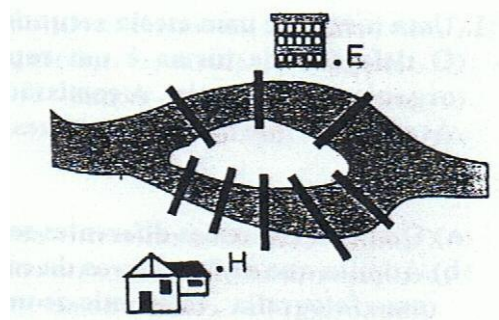
6. Foram oferecidos dez bilhetes para uma peça de teatro a uma turma com doze rapazes e oito raparigas. Ficou decidido que o grupo que vai ao teatro é formado por cinco rapazes e cinco raparigas.

De quantas maneiras diferentes se pode formar este grupo?

- A) ${}^{12}C_5 \times {}^8C_5$ B) ${}^{12}A_5 \times {}^8A_5$ C) $12 \times 8 \times 5^2$ D) $\frac{12! \times 8!}{5!}$
7. Uma empresa de cofres atribuiu ao acaso um código secreto a cada cofre que comercializa. Cada código secreto é formado por 4 algarismos por uma certa ordem. Escolhendo-se um cofre ao acaso, qual é a probabilidade de o código ter exactamente três zeros?

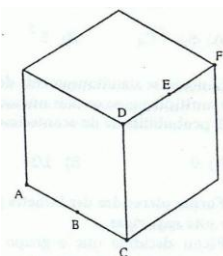
- A) 0,0004 B) 0,0027 C) 0,0036 D) 0,004

8. Na figura ao lado estão representados o rio que atravessa certa localidade, uma ilha situada no leito desse rio e as 8 pontes que ligam a ilha às margens. H representa a habitação e E a escola de um jovem dessa localidade. Para efectuar o percurso de ida (casa – ilha – escola) e volta (escola – ilha – casa), o jovem pode seguir vários caminhos, que diferem uns dos outros pela sequência de pontes utilizadas.



Indique quantos caminhos diferentes pode o jovem seguir, num percurso de ida e volta, sem passar duas vezes pela mesma ponte.

- A) $5 \times 3 + 4 \times 2$ B) $5 \times 4 \times 3 \times 2$ C) $5 + 4 + 3 + 2$ D) $5^2 \times 3^2$
9. Considere os pontos A, B, C, D, E e F, representados sobre o cubo da figura ao lado. Escolhendo três destes pontos ao acaso, a probabilidade de que eles definam um plano é:



- A) 0,5 B) 0 C) 0,9 D) 1

10. Numa caixa estão doze bolas de Berlim com igual aspecto exterior. No entanto cinco não têm creme. Retirando da caixa três desses bolos ao acaso, a probabilidade de que apenas um deles tenha creme é:

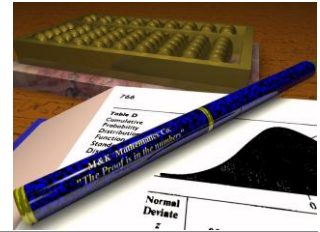
- A) $\frac{7}{12}$ B) $\frac{7}{66}$ C) $\frac{35}{264}$ D) $\frac{7}{22}$

11. Cinco amigos vão dar um passeio num automóvel de cinco lugares. Sabendo que só três deles podem conduzir, o número de formas diferentes de ocuparem os lugares é:

- A) ${}^3A_1 \times {}^4A_2$ B) ${}^5C_4 \times {}^3C_1$ C) ${}^3C_1 \times {}^4A_4$ D) ${}^3C_1 \times {}^4C_4$

Ficha de Trabalho

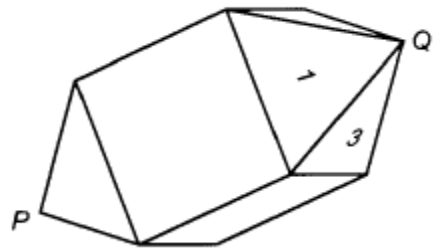
- Exercícios de análise combinatória de exame



- 12.** Numa terra há só quatro médicos. Numa certa noite, adoecem cinco habitantes. Cada um deles escolhe, ao acaso, um dos médicos e chama pelo telefone. Qual a probabilidade de que não chamem todos o mesmo médico?

A) $\frac{4^4 - 1}{4^4}$ B) $1 - \frac{1}{5^4}$ C) $1 - \frac{4}{5^4}$ D) $\frac{4}{4^5}$

- 13.** Na figura está representado um poliedro com doze faces, que pode ser decomposto num cubo e em duas pirâmides quadrangulares regulares.



- a)** Pretende-se numerar as doze faces do poliedro, com os números de 1 a 12 (um número diferente em cada face).

Como se vê na figura, duas das faces do poliedro já estão numeradas, com os números 1 e 3.

a1) De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números?

a2) De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números, de forma a que, nas faces de uma das pirâmides, fiquem só números ímpares e, nas faces da outra pirâmide, fiquem só números pares?

- b)** Considere agora o poliedro num referencial o.n. Oxyz, de tal forma que o vértice P coincida com a origem do referencial, e o vértice Q esteja no semieixo positivo Oy.

Escolhidos ao acaso três vértices distintos, qual é a probabilidade de estes definirem um plano paralelo ao plano de equação $y=0$? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

- 14.** Considere todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.

- a)** Escolhe-se, ao acaso, um desses números.

a1) Determine a probabilidade de o número escolhido ter exactamente dois algarismos iguais a 1. Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

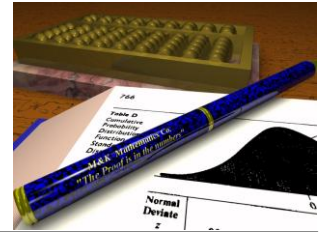
a2) Determine a probabilidade de o número escolhido ter os algarismos todos diferentes e ser maior do que 9800. Apresente o resultado na forma de dízima, com três casas decimais.

- b)** Considere o seguinte problema:

“De todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9, alguns deles cumprem as três condições seguintes:

Ficha de Trabalho

- Exercícios de análise combinatória de exame



- começam por 9;
- têm os algarismos todos diferentes;
- a soma dos quatro algarismos é par.

Quantos são esses números?"

Uma resposta correcta a este problema é $3 \times 4 \times {}^4A_2 + {}^4A_3$.

Numa pequena composição com cerca de vinte linhas, explique porquê.

15. Considere o seguinte problema:

Vinte e cinco jovens (doze rapazes e treze raparigas) pretendem ir ao cinema. Chegadas lá, verificam que existem apenas vinte bilhetes (para duas filas com dez lugares consecutivos em cada uma delas). Comprados os vinte bilhetes, distribuem-nos ao acaso. Como é evidente, cinco jovens irão ficar sem bilhete.

Qual é a probabilidade de uma das filas ficar ocupada só com rapazes e a outra só com raparigas?

Uma resposta correcta a este problema é: $\frac{{}^{12}C_{10} \times {}^{13}C_{10} \times 2 \times 10! \times 10!}{{}^{25}C_{20} \times 20!}$

Numa pequena composição, com cerca de vinte linhas, explique esta resposta.

Nota:

Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:

- referência à Regra de Laplace;
- explicação do números de casos possíveis;
- explicação do números de casos favoráveis.

16. Três casais, os Nunes, os Martins e os Santos, vão ao cinema.

- a) Ficou decidido que uma mulher, escolhida ao acaso de entre as três mulheres, paga três bilhetes, e que um homem, escolhido igualmente ao acaso de entre os três homens, paga outros três bilhetes.

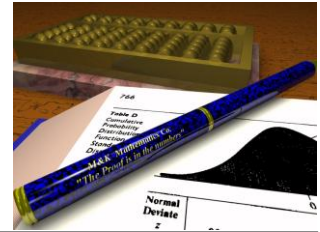
Qual é a probabilidade de o casal Nunes pagar os seis bilhetes? Apresente o resultado na forma de fracção.

- b) Considere o seguinte problema:

"Depois de terem comprado os bilhetes, todos para a mesma fila e em lugares consecutivos, as seis pessoas distribuem-nos ao acaso entre si. Supondo que cada pessoa se senta no lugar correspondente ao bilhete que lhe saiu, qual é a probabilidade de os membros de cada casal ficarem juntos, com o casal Martins no meio?"

Ficha de Trabalho

- Exercícios de análise combinatória de exame



Numa pequena composição, com cerca de quinze linhas, explique por que razão $\frac{2^4}{6!}$ é uma resposta correcta a este problema.

Nota:

Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:

- referência à Regra de Laplace;
- explicação do números de casos possíveis;
- explicação do números de casos favoráveis.

17. Suponha que o dono de um casino lhe faz uma proposta, no sentido de inventar um jogo, para ser jogado por dois jogadores. Em cada jogada, é **lançado um par de dados**, numerados de 1 a 6, e observa-se a **soma dos números saídos**.

O dono do casino coloca ainda algumas restrições:

- o jogo terá de ser justo, isto é, ambos os jogadores deverão ter igual probabilidade de ganhar;
- para que o jogo seja mais emotivo, deverão ocorrer situações em que ninguém ganha, transitando o valor do prémio para a jogada seguinte;
- uma vez que o casino terá de ganhar algum dinheiro, deverá ocorrer uma situação (embora com probabilidade bastante mais pequena do que a probabilidade de cada um dos jogadores ganhar) em que o prémio reverte a favor do casino.

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, apresente, ao dono do casino, uma proposta de um jogo que obedeça a tais condições.

Deverá fundamentar a sua proposta indicando, na forma de percentagem, a probabilidade de, em cada jogada:

- cada um dos jogadores ganhar;
- o casino ganhar.

Sugestão: Comece por elaborar uma tabela onde figurem todas as somas possíveis (no lançamento de dois dados).

Soluções:

1a) 75075 b) 0,114 2a) 2916 2b) 0,504 3) 3% 4) B5)A 6)A
 7)C 8)B 9)C 10)D 11)C 12)A 13a1) 10! 13a2) 103680 13b) $\frac{1}{15}$
 14a1) 6% 14a2) 0,006

COLÉGIO DA RAINHA SANTA ISABEL

Ficha de trabalho de Matemática nº 10

12º Ano

Tema : Distribuição de probabilidade de uma
variável aleatória. Média. Desvio padrão.

2007/ 2008

1) Considere o lançamento de três moedas.

Cada cara obtida faz ganhar 4 pontos e cada escudo faz perder 2 pontos.

1.1) Defina uma variável aleatória.

1.2) Determine o ganho esperado neste jogo.

1.3) Calcule o desvio padrão.

2) Imagine o seguinte jogo: jogamos ao ar três vezes seguidas uma moeda e anotamos os resultados. Cada “cruz” obtida permite ganhar 6 pontos e cada “cara” faz perder 3 pontos. Será este jogo vantajoso para o jogador? Justifique a sua resposta.

3. Certo jogo consiste em lançar uma moeda ao ar até obter cara.

Se sair ao 1º lançamento, o jogador ganha 2,5 € e pára o jogo; se não sair, terá de jogar outra vez e assim sucessivamente com os seguintes ganhos :

se sair ao 2º lançamento ganha 1 €. Ao 3º lançamento 40 centimos,

se sair no 4º lançamento ganha 20 centimos.

Se não sair cara ao 4º lançamento então perde 25 €.

Será este jogo equitativo?

Estabeleça a distribuição de probabilidade e calcule a esperança matemática.

4) O meu amigo Jorge propõe-me o seguinte jogo:

«Lançam-se dois dados equilibrados; se o total for inferior a 7, ele dá-me 3 feijões; se o total for superior a 7, eu dou-lhe um número de feijões igual à diferença entre 12 e o total; se for 7 o jogo é nulo».

Será interessante jogar com ele?

5) Um jogo consiste no seguinte: cada jogador lança dois dados num tabuleiro.

Se obtiver a soma maior ou igual a 11, ganha 6 €; se sair a soma 9 ou 10, recebe 3 €; se sair soma 7 ou 8, recebe 1,5€. Nos restantes casos não recebe nada.

5.1) Qual é a média (ou valor esperado) da variável aleatória “ valor ganho em cada jogada “.

5.2) Qual deverá ser o preço da aposta para cada lançamento, a fim de que o jogo seja “ justo “ ?

6) O resultado de um inquérito em 500 fogos de um bairro degradado sobre o número de crianças (com idades inferiores ou iguais a 14 anos) que nele habitam é :

nº de crianças	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
nº de fogos n_i	25	52	68	123	179	33	11	6	2	1
f_i	6,25%	13%	17%	19,75%	30,75%	8,25%	2,75%	1,5%	0,5%	0,25%

Encarando f_i como um valor aproximado da probabilidade P_i de um fogo ter x_i crianças:

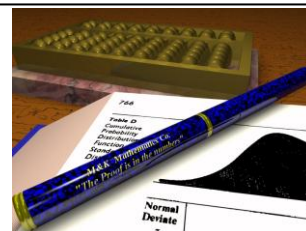
6.1) Qual a probabilidade de que tenha menos de 3 crianças?

6.2) Qual a probabilidade de que tenha mais de 4 crianças?

6.3) Calcule a média e o desvio padrão e $]\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma[$.

Ficha de Trabalho

- Distribuições de Probabilidades
- Exercícios de Exame



Instruções

1. Lança-se duas vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6. Seja X o número de vezes que sai a face 6 nos dois lançamentos. Qual a distribuição de probabilidades da variável X ?

A)

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$

B)

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$

C)

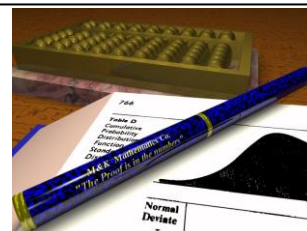
x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{5}{6}$	$2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

D)

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$

Ficha de Trabalho

- Distribuições de Probabilidades
- Exercícios de Exame



2. Numa caixa estão três cartões, numerados de 1 a 3. Extraem-se ao acaso, e em simultâneo, dois cartões da caixa. Seja X o maior dos números saídos.

Qual é a distribuição de probabilidades da variável aleatória X ?

A)

x_i	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

B)

x_i	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

C)

x_i	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

D)

x_i	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

3. Na figura está esquematizado um dado equilibrado, cuja planificação se apresenta esquematizada na figura B.

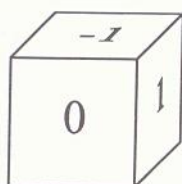


Figura A

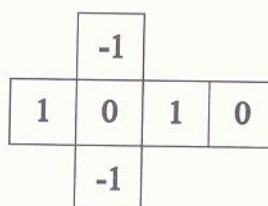


Figura B

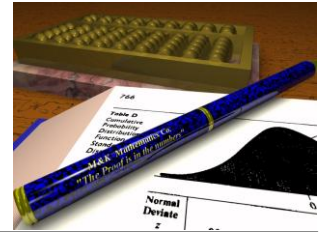
Lança-se este dado duas vezes.

Considere as seguintes variáveis aleatórias, associadas a esta experiência:

X_1 : número saído no primeiro lançamento

Ficha de Trabalho

- Distribuições de Probabilidades
- Exercícios de Exame



X_2 : quadrado do número saído no segundo lançamento

X_3 : soma dos números saídos nos dois lançamentos

X_4 : produto dos números saídos nos dois lançamentos

Uma destas quatro variáveis tem a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	-1	0	1
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

Qual delas?

- A) X_1 B) X_2 C) X_3 D) X_4

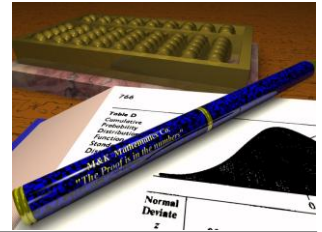
4. Uma caixa contém bolas brancas e bolas pretas, num total de doze bolas. Considere a experiência aleatória que consiste na extracção sucessiva, com reposição, de duas bolas. Seja X a variável que representa o número de bolas brancas extraídas. Na tabela seguinte encontra-se representada a distribuição de probabilidades da variável X .

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

- 4.1. Represente, através de uma tabela, a distribuição de probabilidades da variável Y : «número de bolas pretas extraídas».
- 4.2. Quantas bolas brancas e quantas bolas pretas tem a caixa? Justifique a sua resposta.
- 5.
- 5.1. Seja E um espaço de resultados finito, associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis, mas não certos.
Prove que A e B são independentes se, e só se, $p(B | A) = p(B | \bar{A})$
- 5.2. Numa caixa existem cinco bolas brancas e três bolas pretas. Ao acaso tiram-se sucessivamente duas bolas da caixa, não repondo a 1ª bola na caixa, antes de retirar a 2ª. Utilizando a propriedade enunciada na alínea anterior, mostre que os acontecimentos «a 1ª bola retirada é preta» e «a 2ª bola retirada é branca» não são independentes.

Ficha de Trabalho

- Distribuições de Probabilidades
 - Exercícios de Exame



6. A tabela de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X é:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	a	2a	a

Qual o valor de a ?

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$

7. Uma caixa tem cinco bombons, dos quais apenas dois têm licor.

Tira-se da caixa, ao acaso, uma amostra de três bombons.

Considere que X designa a variável “número de bombons **com licor** existentes nessa amostra”.

Qual das seguintes distribuições de probabilidades pode ser a da variável X?

A)

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{3}{{}^5C_3}$

B)

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{1}{{}^5C_3}$

c)

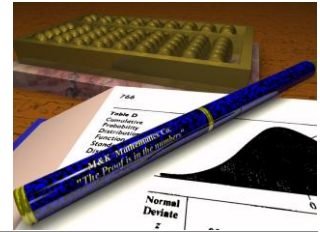
x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{3}{{}^5C_3}$

D)

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{1}{{}^5C_3}$

Ficha de Trabalho

- Distribuições de Probabilidades
- Exercícios de Exame



8. A Patrícia tem uma caixa com cinco bombons de igual aspecto exterior, mas só um é que tem licor. A Patrícia tira, ao acaso, um bombom da caixa, come-o e, se não for o que tem licor, experimenta outro. Vai procedendo desta forma até encontrar e comer o bombom de licor.

Seja X a variável aleatória “número de bombons **sem licor** que a Patrícia come”.

Qual é a distribuição de probabilidade da variável X ?

A)

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

B)

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4

C)

x_i	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

D)

x_i	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4

9. A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X é dada pela tabela

x_i	0	2	4
$P(X=x_i)$	a	b	b

(a e b designam números reais).

A média da variável aleatória X é igual a 1.

Qual o valor de a e qual o valor de b?

A) $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{4}$

B) $a = \frac{3}{5}$; $b = \frac{1}{5}$

C) $a = \frac{2}{3}$; $b = \frac{1}{6}$

D) $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{6}$

Ficha de Trabalho

- Distribuições de Probabilidades
- Exercícios de Exame



10. O João tem catorze discos de música ligeira:

- seis são portugueses;
- quatro são espanhóis;
- três são franceses;
- um é italiano.

10.1. O João pretende seleccionar quatro desses catorze discos.

10.1.1. Quantos conjuntos diferentes pode o João fazer, de tal modo que os quatro discos seleccionados sejam de quatro países diferentes, ou seja, um de cada país?

10.1.2. Quantos conjuntos diferentes pode o João fazer, de tal modo que quatro discos seleccionados sejam todos do mesmo país?

10.2. Considere agora a seguinte experiência: o João selecciona, ao acaso, quatro dos catorze discos.

Seja X a variável aleatória: “número de discos italianos seleccionados”.

Construa a tabela de distribuição de probabilidade da variável X . Apresente as probabilidades na forma de fracção irredutível.

11. O João tem, no bolso, **seis** moedas: duas de 1 euro e quatro moedas de 50 cêntimos.

O João retira, simultaneamente e ao acaso, duas moedas do bolso.

11.1. Seja X a quantia, em euros, correspondente às moedas retiradas pelo João.

Construa a tabela de distribuição de probabilidade da variável X , apresentando as probabilidades na forma de fracção irredutível.

11.2. Depois de ter retirado as duas moedas do bolso, o João informou a sua irmã Inês de que elas eram iguais. Ela apostou, então, que a quantia retirada era 2 euros.

Qual é a probabilidade de a Inês ganhar a aposta? Apresente o resultado sob a forma de fracção irredutível.

Soluções:

1. A) 2. A) 3. D)

Ficha de Trabalho

- Distribuições Normais
 - Exercícios de Exame ou tipo de exame



Instruções

1. Admita que, numa certa escola, a variável “Altura das alunas do 12ºano de escolaridade” segue uma distribuição aproximadamente normal, de média 170 cm.

Escolhe-se, ao acaso, uma aluna do 12º ano dessa escola.

Relativamente a essa rapariga, qual dos seguintes acontecimentos é o mais provável?

- A) A sua altura é superior a 180 cm.
- B) A sua altura é inferior a 180 cm.
- C) A sua altura é superior a 155 cm.
- D) A sua altura é inferior a 155 cm.

2. Na figura estão representados os gráficos de duas distribuições normais.

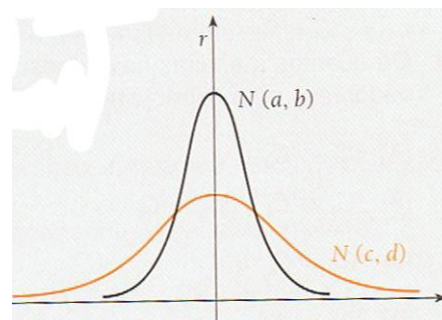
Uma das distribuições tem valor médio a e desvio padrão b .

A outra distribuição tem valor médio c e desvio padrão d .

Os gráficos são simétricos em relação à mesma recta r .

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- A) $a = c$ e $b > d$
- B) $a = c$ e $b < d$
- C) $a > c$ e $b = d$
- D) $a < c$ e $b = d$



3. O treinador de um atleta fez um estudo estatístico dos tempos gastos ultimamente na corrida dos 100 metros por esse atleta e verificou que essa variável segue uma distribuição aproximadamente normal, com valor médio de 10,50 segundos e desvio padrão de 0,20 segundos.

Essa atleta vai participar numa corrida de 100 metros.

a) A probabilidade de o atleta fazer um tempo entre 10,30 e 10,90 segundos é, aproximadamente:

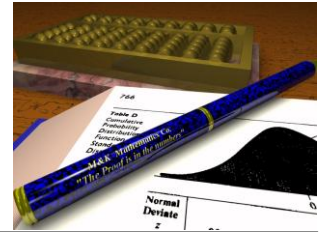
- A) 0,683
- B) 0,136
- C) 0,819
- D) 0,954

b) A probabilidade de melhorar o seu record pessoal, que é de 10,10 segundos, é, aproximadamente:

- A) 0,977
- B) 0,023
- C) 0,159
- D) 0,954

Ficha de Trabalho

- Distribuições Normais
 - Exercícios de Exame ou tipo de exame



4. Admita que, numa certa escola, a variável “Classificação a Matemática obtida pelos alunos do 12º ano no 1º período” segue uma distribuição aproximadamente normal de média 11 valores. Escolhe-se, ao acaso, um aluno do 12º ano dessa escola. Relativamente a esse aluno, qual dos seguintes acontecimentos é mais provável?
- A) A sua classificação a Matemática, no 1º período, é superior a 14 valores.
 - B) A sua classificação a Matemática, no 1º período, é inferior a 14 valores.
 - C) A sua classificação a Matemática, no 1º período, é inferior a 9 valores.
 - D) A sua classificação a Matemática, no 1º período, é superior a 9 valores.
5. Numa estufa existem 1200 plantas de determinada espécie. Sabe-se que as alturas das plantas dessa espécie seguem uma distribuição aproximadamente normal, com valor médio de 80 cm e desvio padrão 5 cm. Qual é o número dessas plantas que é previsível terem uma altura inferior a 85 cm?
6. Numa escola com 400 alunos do 12º ano verificou-se que os seus “pesos”, em quilogramas, se distribuem segundo uma normal de valor médio 70 e desvio padrão 5.
- 6.1. Escolhe-se, ao acaso, um aluno do 12º ano dessa escola. Relativamente a esse aluno:
- 6.1.1. Qual é mais provável, “pesar” mais que 73 kg ou “pesar” menos que 68 kg?
 - 6.1.2. Qual é a probabilidade de ter um “peso” compreendido entre 65 kg e 80 kg? Apresente o resultado em percentagem, com uma casa decimal.
- 6.2. Quantos alunos do 12º ano dessa escola é de esperar que “pesem” mais que 75 kg?

Ficha de Trabalho

○ Triângulo de Pascal



Questões

- A soma de todos os elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 8^5 . O maior elemento da linha seguinte é:
(A) 11.440 (B) 6.450 (C) 12.870 (D) 352.716
- ${}^{2001}C_{101} - {}^{2000}C_{101}$ é igual a:
(A) ${}^{2001}C_{100}$ (B) ${}^{2000}C_{1900}$ (C) ${}^{2000}C_{102}$ (D) ${}^{2000}C_{101}$
- A soma de todos os elementos de 2 linhas consecutivas do triângulo de Pascal é 3072. O terceiro elemento da primeira delas é:
(A) 10 (B) 45 (C) 55 (D) 120
- Considere três linhas consecutivas do triângulo de Pascal, das quais se reproduzem alguns elementos:

.....	3432	a	c	
.....	6435	b		
.....	11440			

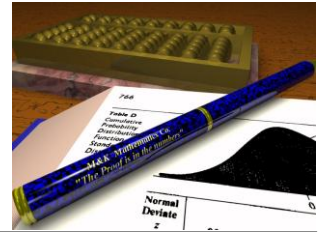
O valor de c é:

- (A) 3003 (B) 2002 (C) 5005 (D) 6435
- Das afirmações seguintes:
(I) $p \cdot {}^nC_p = n \cdot {}^{n-1}C_{p-1}$ (II) ${}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \dots + {}^nC_{n-1} = 2 \cdot (2^{n-1} - 1)$
(A) Apenas (I) é válida (B) (I) e (II) são ambas válidas
(C) Apenas (II) é válida (D) Nem (I) nem (II) são válidas
 - Considere a linha do triângulo de Pascal em que o segundo elemento é 35. Escolhem-se, ao acaso, dois elementos dessa linha. Qual é a probabilidade de estes dois elementos serem iguais?
(A) $\frac{19}{{}^{35}C_2}$ (B) $\frac{35}{{}^{36}C_2}$ (C) $\frac{1}{{}^{35}C_2}$ (D) $\frac{18}{{}^{36}C_2}$
 - Uma certa linha do Triângulo de Pascal é constituída por todos os números da forma ${}^{24}C_p$. Escolhendo ao acaso um número dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser 1?
(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{24}$ (C) $\frac{1}{25}$ (D) $\frac{2}{25}$
 - Qual é o 4º elemento de uma determinada linha do triângulo de Pascal, sabendo que o produto dos dois últimos elementos da linha anterior é 51?
(A) 270725 (B) 22100 (C) 19600 (D) 20825

Algumas soluções: 1C) 2B) 3B) 4B) 5B)

Ficha de Trabalho

- Binómio de Newton



Questões

1. Qual o termo independente de x no desenvolvimento de:

a) $\left(\frac{1}{x} - x\right)^{10}$

b) $\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^6$

2. Considere o desenvolvimento do binómio seguinte: $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right)^8$.

- a) Determine o ou os termos de maior coeficiente binomial desse desenvolvimento.
- b) Determine, caso exista, o termo em x^5 .
- c) Determine a soma de todos os coeficientes binomiais.
- d) Determine a soma de todos os coeficientes polinomiais.

3. Sabendo que $36x^7y$ é termo do desenvolvimento de $(x + \sqrt{y})^n$ e $y \geq 0$, determine, caso exista:

- a) O termo com o mesmo grau em x e em y .
- b) O termo com o grau em x igual ao dobro do grau em y .
- c) O ou os termos médios.

4. Mostre que $1 + \sqrt{3}$ é uma das raízes de índice 4 de $28 + 16\sqrt{3}$.

5. Verifique se existe algum termo independente de x no desenvolvimento de $\left(\sqrt[4]{x} - \frac{1}{x}\right)^n$, sabendo que a soma dos coeficientes binomiais é 256.

6. O coeficiente binomial do termo em x , no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{2}\right)^{21}$ é:

A) $\frac{21}{2^{10}}$

B) $\frac{201}{21}$

C) $\frac{1}{2^{10}}$

D) 21

7. Sendo $S = {}^{20}C_0 + {}^{20}C_1 \cdot 2 + {}^{20}C_2 \cdot 2^2 + \dots + {}^{20}C_{19} \cdot 2^{19} + {}^{20}C_{20} \cdot 2^{20}$, tem-se:

A) $S = 2^{40}$

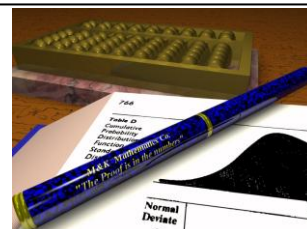
B) $S = 9^{10}$

C) $S = 20^{20}$

D) $S = 20!$

Ficha de Trabalho

○ Número de Neper



Tendo em conta que:

- $\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$
- $\lim \left(1 + \frac{k}{u_n} \right)^{u_n} = e^k, k \in \mathbb{R}, u_n \rightarrow +\infty$

1) Calcule os seguintes limites:

1.1) $\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2n}$

1.2) $\lim \left(1 + \frac{5}{n} \right)^{3n}$

1.3) $\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+5}$

1.4) $\lim \left(1 - \frac{3}{2n} \right)^{4n}$

1.5) $\lim \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^n$

1.6) $\lim \left(\frac{3n-1}{3n+1} \right)^n$

1.7) $\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+2}$

1.8) $\lim \left(1 + \frac{0,5}{n} \right)^n$

1.9) $\lim \left(1 + \frac{5}{2n} \right)^n$

1.10) $\lim \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^n$

1.11) $\lim \left(1 + \frac{2}{3n} \right)^{3n+1}$

1.12) $\lim \left(1 - \frac{3}{n} \right)^{2n}$

1.13) $\lim \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{8n}$

1.14) $\lim \left(\frac{n+7}{n+1} \right)^{0,5n}$

1.15) $\lim \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{2n}$

1.16) $\lim \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^n$

1.17) $\lim \left(\frac{5n+1}{5n-1} \right)^{n+2}$

1.18) $\lim \left(1 - \frac{4}{n^2} \right)^n$

Soluções:

1.1) e^2

1.2) e^{15}

1.3) e

1.4) $\frac{1}{e^6}$

1.5) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

1.6) $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$

1.7) e

1.8) $\sqrt{e}$

1.9) $e^{2,5}$

1.10) e

1.11) e^2

1.12) e^{-6}

1.13) e^{-16}

1.14) e^3

1.15) e^{-2}

1.16) e

1.17) $\sqrt[5]{e^2}$

1.18) 1

Ficha de Trabalho

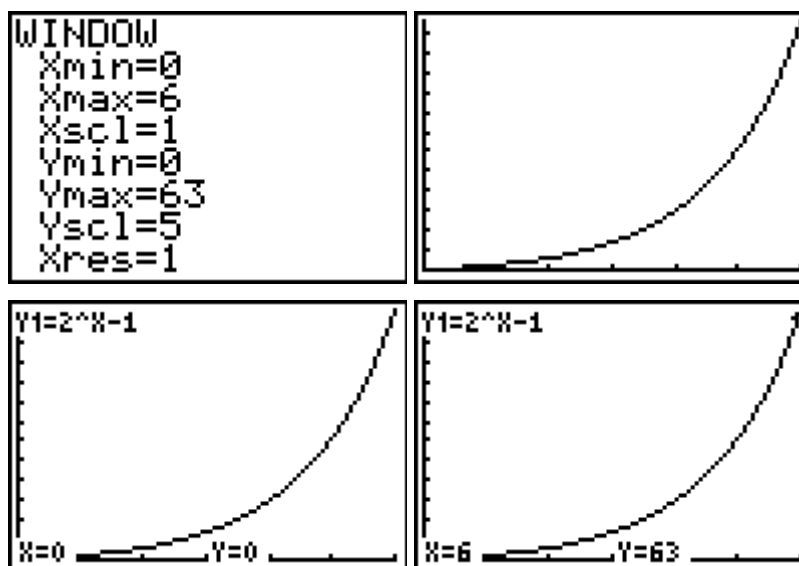
- Introdução à função exponencial
- Actividade 1 e 2 do livro

**Actividade 1 – O perigo de não descansar (página 7)**

Entre vários factores que aumentam o risco de acidente de automóvel estão: as condições atmosféricas adversas, o mau estado do piso, o consumo de álcool, ... , está também o número de horas a conduzir sem interromper para descansar. Admita que a função; $r(t) = 2^t - 1$ traduz, em percentagem, o agravamento do risco (ou seja, da probabilidade) de acidente depois de t horas a conduzir sem interrupção.

Suponha que o domínio desta função é o intervalo $[0,6]$.

- 1º. Usemos a calculadora para obter uma representação da função r e identificarmos o seu contradomínio.



O contradomínio de r é o intervalo $[0,63]$.

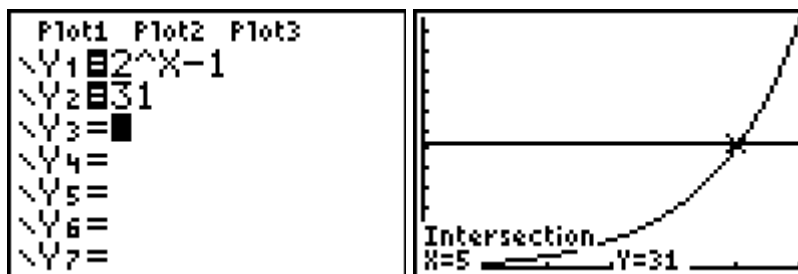
Recorrendo à calculadora gráfica vamos responder às seguintes questões:

- 2º. O agravamento do risco de acidente ao fim 4 horas é 15%, dado por: $r(4) = 2^4 - 1 = 15$. E ao fim de cinco horas e meia é aproximadamente 44,25%, dado por $r(5,5) = 2^{5,5} - 1$ este valor pode de ser calculado com a calculadora e obtemos $r(5,5) \approx 44,25$, mas para obter um valor exacto temos de ver qual o significado de $2^{5,5}$ que podemos calcular como potência de expoente fraccionário $2^{5,5} = 2^{\frac{11}{2}} = \sqrt{2^{11}} = 32\sqrt{2}$ e então $r(5,5) = 32\sqrt{2} - 1$.

- 3º. O número de horas consecutivas de condução que agrava o risco de acidente em 31% é a solução da equação $r(x) = 31$ que vamos resolver utilizando a calculadora:

Ficha de Trabalho

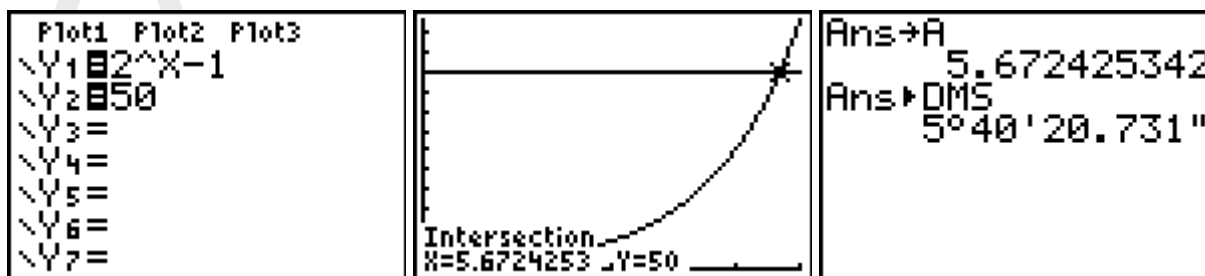
- Introdução à função exponencial
- Actividade 1 e 2 do livro



O número de horas que agrava o risco de acidente em 31% é 5.

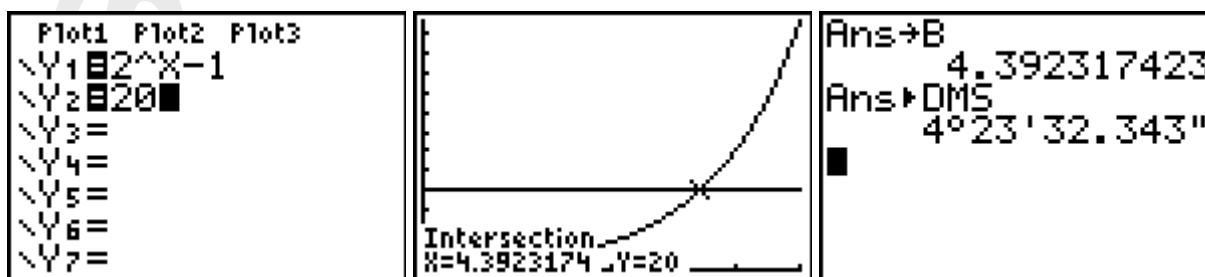
A equação podia ser resolvida analiticamente $2^t - 1 = 31 \Leftrightarrow 2^t = 32 \Leftrightarrow 2^t = 2^5 \Leftrightarrow t = 5$

4º. O número de horas consecutivas de condução que agrava o risco de acidente em 50% é a solução da equação $r(x) = 50$ que vamos resolver utilizando a calculadora:



O risco de acidente agrava-se de 50% ao fim de aproximadamente 5 horas e 40 minutos.

5º. O tempo máximo de condução, em horas e minutos, que garante que o risco não é gravado mais de 20% é dado pela solução da equação $r(x) = 20$



O tempo máximo de condução, em horas e minutos, que garante que o risco não é gravado mais de 20% é, aproximadamente, 4 horas e 23 minutos.

Actividade 2 – As vendas de telemóveis (página 7)

Espera-se que o número de aparelhos de um novo modelo de telemóvel, vendidos x meses depois de 1 de Janeiro de 2005, seja dado, aproximadamente, por:

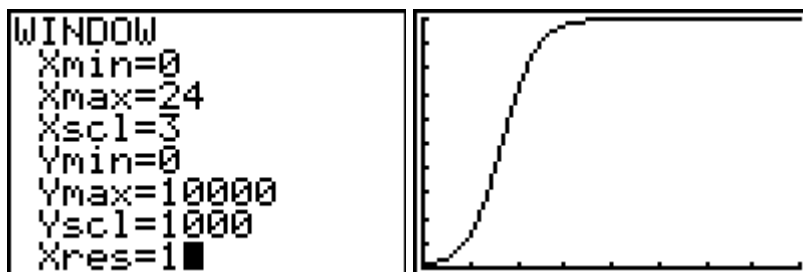
$$v(x) = \frac{10000}{1 + 100 \times 2,5^{-x}}$$

Ficha de Trabalho

- Introdução à função exponencial
- Actividade 1 e 2 do livro

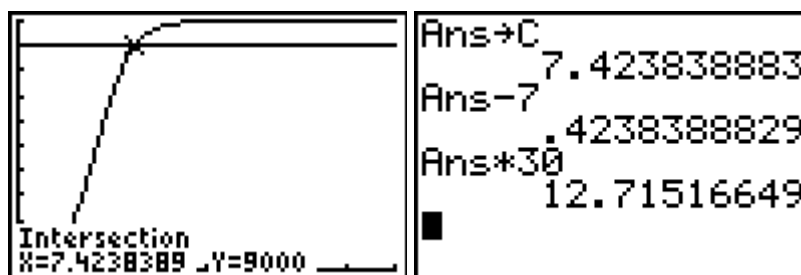


1º. Vamos representar graficamente a função para um período de 2 anos.

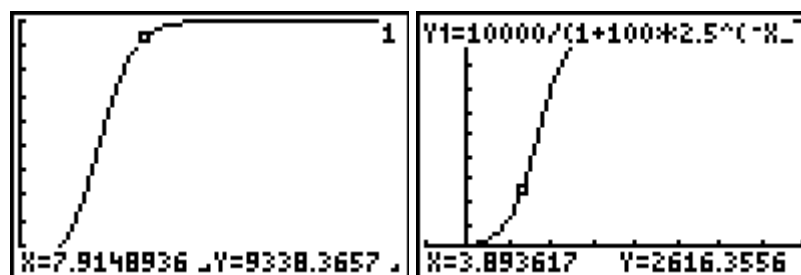


2º. Relativamente a este modelo de telemóveis e usando a representação gráfica vamos responder às seguintes questões:

- A 1 de Janeiro de 2005 espera-se que estejam vendidas 99 telemóveis. ($v(0) \approx 99$) E ao fim do 1º trimestre de 2005, espera-se que estejam vendidos 1351 telemóveis. ($v(3) \approx 1351$)
- Espera-se atingir uma venda de 9000 telemóveis por volta do dia 10 de Agosto de 2005.

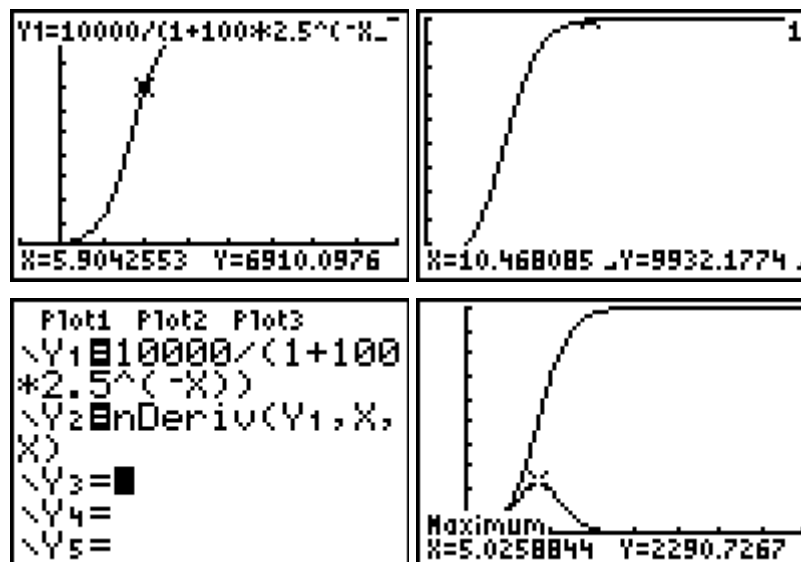


- O aumento das vendas não tem um ritmo constante. É nos primeiros 8 meses que a venda dos telemóveis cresce, mas mais rapidamente é entre Maio e Junho e é a meio de Outubro de 2005 que as vendas vão estabilizar. Mas a quebra no crescimento dá-se em Junho, é para $x=5$ que se nota a mudança do sentido da concavidade como podemos descobrir encontrando o máximo da derivada da função:



Ficha de Trabalho

- Introdução à função exponencial
- Actividade 1 e 2 do livro

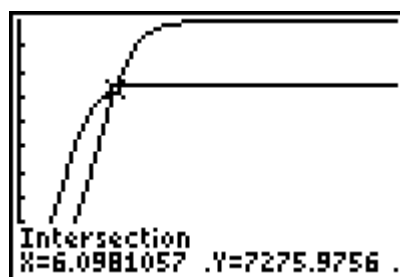


- Se continuar a ser comercializado não conseguirá nunca atingir 11 000 telemóveis porque o número de telemóveis apenas se aproximará de 10 000 ou seja nunca conseguirão vender mais de 9 999.

3º. Acerca de um outro modelo de telemóvel, estima-se que o número de aparelhos vendidos, x meses depois de 1 de Janeiro de 2005, seja dado por:

$$t(x) = \frac{15000}{2 + 50 \times 3^{-x}}$$

Cada um dos fabricantes destes dois modelos de telemóvel diz que vai estar à frente do outro relativamente ao número de aparelhos vendidos.



O fabricante do segundo modelo pensa apenas nos primeiros 6 meses, altura em que o telemóvel está a ser lançado, desprezando o tempo durante o qual as vendas estabilizam.

O fabricante do primeiro modelo pensa que se tiverem o modelo à venda durante dois anos, ele vai estar durante ano e meio a vender mais que o outro.

Na realidade, só entre Janeiro e Julho de 2005 é que o segundo modelo se vende mais.

Resolver os exercícios 4, 5 e 6 da página 8.

Ficha de Trabalho

- Equações e inequações com exponenciais e logaritmos.
- Caracterização da inversa de uma função exponencial e logarítmica



1. Resolva, em $\mathbb{R}$ as seguintes equações:

- | | | |
|-----------------------------------|---------------------------------|--|
| 1.1. $3^x = 27$ | 1.2. $7^{x-3} = 1$ | 1.3. $2^x = \frac{1}{8}$ |
| 1.4. $5^x = 15$ | 1.5. $3^{4x+2} = 45$ | 1.6. $5^{3-\frac{2}{x+1}} = 25$ |
| 1.7. $7^{3- x-1 } = \frac{1}{49}$ | 1.8. $3^{2+4x} = 9^{3x-1}$ | 1.9. $2^{x^2-4x+3} = 1$ |
| 1.10. $3^{x^2} = 81$ | 1.11. $3^{x^4-5x^2+4} = 1$ | 1.12. $2^{x^2-5x} = \frac{1}{64}$ |
| 1.13. $e^{x-2} = 1$ | 1.14. $2^{x+1} - 2^{x-1} = 192$ | 1.15. $9^x - 4 \times 3^x = -3$ |
| 1.16. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ | 1.17. $e^x + 4e^{-x} - 5 = 0$ | 1.18. $\frac{1}{5^{2x}} = \frac{25}{\sqrt{5}}$ |

2. Determine o conjunto solução de cada uma das equações:

- | | |
|--|---|
| 2.1. $5^{3x-2} = 25^{x^2-2}$ | 2.2. $4^x - 6 \times 2^{x+1} + 36 = 0$ |
| 2.3. $3 \times 4^{x+1} - 5 \times 2^{x-1} = 182$ | 2.4. $\frac{4e^{2x} - 4e^x - 3}{x^4 + 2} = 0$ |
| 2.5. $e^{-x} - 3e^x + 2 = 0$ | 2.6. $2^x + 3 \times 2^x + 32 = 8 \times 2^x$ |
| 2.7. $3^{2-x} + 2 \times 3^{3-x} = 7$ | 2.8. $2^{x+2} + 4^{x+1} - 24 = 0$ |

3. Resolva em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes inequações:

- | | |
|---|--|
| 3.1. $e^{2x} < 5$ | 3.2. $3^{3x+1} > 9^{x-1}$ |
| 3.3. $3^x \geq \frac{1}{3}$ | 3.4. $(x^2 - 5)e^{x-2} > 0$ |
| 3.5. $x \cdot e^{x-1} - x > 0$ | 3.6. $25^x - 5^{x+1} + 6 < 0$ |
| 3.7. $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{4x} + 4^{2x} + 12 > 0$ | 3.8. $\sqrt[4]{8^{3x}} < \sqrt{2^{-x+3}}$ |
| 3.9. $\frac{x^2 + 4}{3^x + 3^{-x+2} - 10} < 0$ | 3.10. $0,001^{x-1} < \frac{10^4}{10^{2x}}$ |
| 3.11. $2^{1- 2-x } \geq \sqrt{8}$ | |

4. Caracterize a função inversa de cada uma das funções definidas pelas expressões:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 4.1. $f(x) = 1 - 3^{x+2}$ | 4.2. $f(x) = 2^{-x-4} + 3$ |
| 4.3. $f(x) = e^{2x-1} + 1$ | 4.4. $f(x) = 1 + 2^{-3+x}$ |

Ficha de Trabalho

- Equações e inequações com exponenciais e logaritmos.
- Caracterização da inversa de uma função exponencial e logarítmica



5. Determine o domínio e o contradomínio de cada uma das funções reais de variável real definidas por:

$$5.1. g(x) = 4^{2 - \frac{1}{x}}$$

$$5.2. g(x) = \frac{3}{2^{x-1} - 8}$$

$$5.3. g(x) = \frac{2}{1 + e^{x-1}}$$

$$5.4. g(x) = e^{\frac{x}{x+2}} - 1$$

$$5.5. g(x) = 2 - 4^{\frac{2}{x+1}}$$

6. Aplicando a definição de logaritmo, determine o valor de x de modo que:

$$6.1. \log_x 81 = 2$$

$$6.2. \log_x \sqrt{8} = \frac{3}{2}$$

$$6.3. \log_{x+2} 64 = 2$$

$$6.4. \log_{243} x = \frac{1}{5}$$

$$6.5. \log_5 (4 + x) = 2$$

7. Resolva em $\mathbb{R}$, cada uma das equações:

$$7.1. (x - 2)^2 = \log_2 512$$

$$7.2. \log_2 \frac{1}{16} = x$$

$$7.3. \log_{x^3} \left(\frac{1}{27} \right) = -1$$

$$7.4. \log_{x^2} \left(\frac{1}{16} \right) = -1$$

8. Resolva em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes inequações:

$$8.1. \log_2 (6 - x) > 1$$

$$8.2. (\log_3 x)^2 + \log_3 x - 6 > 0$$

$$8.3. \log_3 (3 - x) < \log_3 (x + 1) - 3$$

$$8.4. \frac{4(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 3}{e^{6x} + 4} < 0$$

$$8.5. e^x \cdot \ln x + e^x \geq 0$$

$$8.6. (1 - e^x)(1 - \ln x) \geq 0$$

$$8.7. e^x \cdot \ln x - \ln x \geq 0$$

$$8.8. \log_2 x - \log_4 (x - 1) \geq 1$$

$$8.9. \ln(3x^2 - x) \leq \ln x + \ln 2$$

9. Determine o domínio e o contradomínio de cada uma das funções definidas por:

$$9.1. f(x) = 2 + \log_3 (2x - 1)$$

$$9.2. g(x) = 1 + \log(x + 1)$$

$$9.3. h(x) = -1 + \ln(x^2 - 1)$$

$$9.4. k(x) = 1 + \ln|x + 2|$$

Ficha de Trabalho

- Equações e inequações com exponenciais e logaritmos.
- Caracterização da inversa de uma função exponencial e logarítmica



10. Defina a função inversa de cada uma das seguintes funções:

10.1. $f(x) = \log_2(x + 4)$

10.2. $f(x) = 3 + \ln(1 - x)$

10.3. $f(x) = 1 - \log_3\left(\frac{2}{x}\right)$

10.4. $f(x) = \frac{3}{2 - \log x}$

10.5. $f(x) = 13 - 2\log_4(x + 2)$

10.6. $f(x) = \frac{3}{\log_2(2x - 1)}$

Soluções:

1.1. $x = 3$

1.2. $x = 3$

1.3. $x = -3$

1.4. $x = 1 + \log_5 3$

1.5. $x = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\log_3 15$

1.6. $x = 1$

1.7. $x = 6 \vee x = -4$

1.8. $x = 2$

1.9. $x = 3 \vee x = 1$

1.10. $x = 2 \vee x = -2$

1.11. $x = 2 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = -1$

1.12. $x = 3 \vee x = 2$

1.13. $x = 2$

1.14. $x = 7$

1.15. $x = 0 \vee x = 1$

1.16. $x = 0 \vee x = \ln 2$

1.17. $x = 0 \vee x = \ln 4$

1.18. $x = -\frac{3}{4}$

2.1. $x = 2 \vee x = -\frac{1}{2}$

2.2. $x = \log_2 6$

2.3. $x = 2$

2.4. $x = \ln \frac{3}{2}$

2.5. $x = 0$

2.6. $x = 3$

2.7. $x = 2$

2.8. $x = 1$

3.1. $\left] -\infty; \frac{\ln \sqrt{5}}{2} \right[$

3.2. $] -3; +\infty[$

3.3. $[-1; +\infty[$

3.4. $] -\infty; -\sqrt{5}[\cup] \sqrt{5}; +\infty[$

3.5. $] -\infty; 0[\cup] 1; +\infty[$

3.6. $] \log_5 2; \log_5 3[$

3.7. $] -\infty; \frac{1}{2}[$

3.8. $] -\infty; \frac{6}{11}[$

3.9. $] 0; 2[$

3.10. $] -1; +\infty[$

3.11. $\{ \}$

4.1. $f^{-1}:] -\infty; 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \log_3(1 - x) - 2$

4.3. $f^{-1}:] 1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(x - 1)$

4.2. $f^{-1}:] 3; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto -4 - \log_2(x - 3)$

4.4. $f^{-1}:] 1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto 3 + \log_2(x - 1)$

5.1. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}; CD = \mathbb{R}^+ \setminus \{16\}$

5.2. $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}; CD = \left] -\infty; -\frac{3}{8} \right[\cup] 0; +\infty[$

5.3. $D = \mathbb{R}; CD =] 0; 2[$

5.4. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}; CD =] -1; +\infty[\setminus \{e - 1\}$

5.5. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; CD = \left] -\infty; 1 \right[\cup] 1; 2[$

6.1. $x = 9$

6.2. $x = 2$

6.3. $x = 6$

6.4. $x = 3$

6.5. $x = 21$

Ficha de Trabalho

- Equações e inequações com exponenciais e logaritmos.
- Caracterização da inversa de uma função exponencial e logarítmica



7.1. $x = 5$ 7.2. $x = 3$ 7.3. $x = -4$ 7.4. $x = 4 \vee x = -4$

8.1. $x < 4$ 8.2. $x > 9$ 8.3. $x \in \left] \frac{20}{7}; 3 \right[$ 8.4. $x \in \left] \frac{\sqrt{2}}{2}; 2\sqrt{2} \right[$

8.5. $x \in \left[\frac{1}{e}; +\infty \right[$ 8.6. $x \in [e; +\infty[$ 8.7. $x \in]0; 1]$ 8.8. $x \in]1; +\infty[$

8.9. $x \in \left] \frac{1}{3}; 1 \right]$

9.1. $D = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[; CD = \mathbb{R}$

9.2. $D =]-1; +\infty[; CD = \mathbb{R}$

9.3. $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[; CD = \mathbb{R}$

9.4. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}; CD = \mathbb{R}$

10.1. $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow]-4; +\infty[$
 $x \mapsto -4 + 2^x$

10.2. $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow]-\infty; 1[$
 $x \mapsto 1 - e^{x-3}$

10.3. $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto 2 \times 3^{x-1}$

10.4. $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{e^2\}$
 $x \mapsto e^{\frac{2x-3}{x}}$

10.5. $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow]-2; +\infty[$
 $x \mapsto -2 + 4^{\frac{3-x}{2}}$

10.6. $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\cup]1; +\infty[$
 $x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 2^{\frac{3}{x}}$

Ficha de Trabalho

- Funções exponenciais e logarítmicas

Parte I

Questões de escolha múltipla

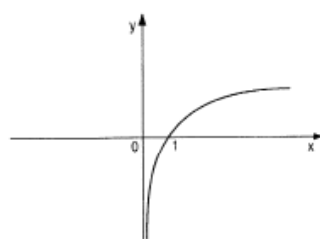
Nas questões seguintes, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas.

1. Sejam P e Q respectivamente os conjuntos solução, em $\mathbb{R}$, das condições $e^{\frac{2}{x}} = e^{x+1}$ e $\frac{1}{e^{2x+1}} < e^{x^2}$. Então:

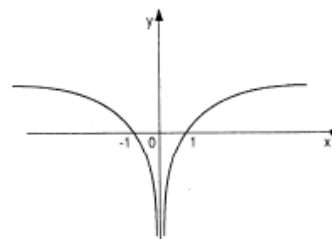
- A. $P = \{-2; 1\}$ e $Q = \mathbb{R}$ B. $P = \{-2; 1\}$ e $Q = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
 C. $P = \{-1; 2\}$ e $Q = \emptyset$ D. $P = \{-1; 2\}$ e $Q = \mathbb{R}$

2. A representação gráfica da função $x \mapsto |\ln(x)|$ é a seguinte:

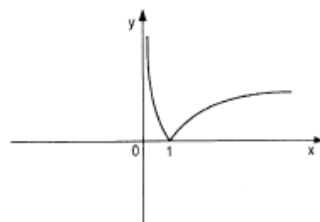
A



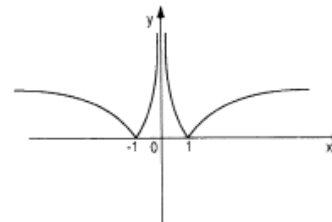
B



C



D



3. Para depósitos feitos numa certa modalidade, uma instituição bancária credita os juros semestralmente à taxa de 4% ao ano.

Um cliente desse banco fez um depósito de 1000 contos, nessa modalidade.

O capital relativo a esse depósito, em contos, passados n anos, será

- A. $1000 \times 1,04n$ B. $1000 \times 1,04^n$ C. $1000 \times 1,02^{2n}$ D. $1000 \times 1,02^n$

4. Considere a função f definida por $f(x) = \ln(3x)$.

Indique qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico da função f :

- A. $(e; \ln 3)$ B. $(e; 1 + \ln 3)$ C. $(e; e + \ln 3)$ D. $(e; e \cdot \ln 3)$

5. Na figura está parte da representação gráfica da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_8 x$.

P é um ponto do gráfico de f , que tem ordenada $\frac{1}{3}$. Qual a abcissa de P?

- A. $\frac{8}{3}$ B. 1 C. $\ln\left(\frac{8}{3}\right)$ D. 2

6. Seja $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = \log_3\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt[5]{x}\right)$.

Uma expressão que também pode definir a função g é:

- A. $1 - \log_3(\sqrt[5]{x})$ B. $-\log_3(\sqrt[5]{x})$ C. $\frac{\log_3(x) - 5}{5}$ D. $\frac{\log_3(x - 5)}{5}$

7. Sejam a , b e c três números reais tais que $\log_a b = c$. Qual é o valor de $\log_a\left(\frac{b}{a^k}\right)$?

- A. $c - k$ B. $c - a^k$ C. $c - k \cdot a$ D. $\frac{c}{a^k}$

8. Certo tratamento médico consiste na aplicação, a um paciente, de uma determinada substância. Admita que a quantidade Q de substância que permanece no paciente, t horas após a aplicação, é dada, em miligramas, por $Q(t) = 250^{1-0,1t}$.

A quantidade de substância aplicada ao doente foi

- A. 10 mg B. 50 mg C. 100 mg D. 250 mg

9. Sabe-se que $\log_2 a = \frac{1}{5}$. Qual é o valor de $\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right)$?

- A. -1 B. -2 C. -3 D. -4

10. Sejam a e b dois números reais positivos.

Qual das seguintes igualdades é equivalente a $\ln(a) = -\ln(b)$?

- A. $a + b = 1$ B. $\frac{a}{b} = 1$ C. $a \times b = 1$ D. $a - b = 1$

11. Indique qual das expressões seguintes é, para qualquer número real a superior a 1, igual a $a^{2+\log_a 3}$
- A. $3a^2$ B. $2a^3$ C. $3+a^2$ D. $2+a^3$
12. O gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 0,1 + 0,2e^{0,3x}$, tem uma única assíntota. Qual das condições seguintes é uma equação dessa assíntota?
- A. $y = 0$ B. $y = 0,1$ C. $y = 0,2$ D. $y = 0,3$

Questões de resposta aberta

Indique todos os cálculos que efectuar. Explique os raciocínios e justifique as conclusões.

1. Admita que numa colónia de bactérias, reproduzindo-se normalmente, o número de bactérias existentes, t horas após um determinado instante inicial é dado aproximadamente por:

$$N(t) = N_0 e^{0,0796 \cdot t}$$

onde N_0 é a população inicial.

Num certo instante existiam 500 bactérias. Passadas 36 horas, quantas bactérias existirão na colónia? Apresente o resultado arredondado às unidades.

2. Uma cooperativa recolhe a produção excedentária de batata de uma certa região agrícola. Estudos efectuados permitem concluir que a procura, P , em toneladas, e o preço p , em euros, da venda por tonelada para uma fábrica de puré de batata, estão de acordo com o seguinte modelo:

$$P = 10^3 \times p^{-0,2}$$

- a) Num certo ano, a cooperativa vendeu cada quilograma de batata a 12 cêntimos. Qual foi, em toneladas, a procura nesse ano? Apresente o resultado arredondado às unidades.
- b) No ano seguinte, a procura foi de 400 toneladas. Com a ajuda da calculadora, indique o preço de venda por tonelada. Apresente o resultado arredondado às unidades.
3. O nível de som N , medido em decibéis, é função da respectiva intensidade I , medida em watts por metro quadrado, de acordo com a igualdade:

$$N = 10 \log(10^{12} \times I), \text{ com } I > 0.$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

- a) Verifique que $N = 120 + 10 \log I$.
- b) Admita que o nível de ruído de um avião a jacto, ouvido por uma pessoa que se encontra na varanda de um aeroporto, é de 140 decibéis. Determine a intensidade desse som, em watts por metro quadrado.

4. A Maria assou um cabrito no forno. Depois de assado, colocou-o na bancada da cozinha para arrefecer. Suponha que a temperatura em graus centígrados, t horas após ter saído do forno, é dada por:

$$F(t) = 20 + 250 \times 8^{-0,8t}$$

- Qual a temperatura a que o cabrito foi retirado do forno?
 - Ao fim de quanto tempo, em horas e minutos, o assado atinge a temperatura de 40 graus?
 - Se o cabrito ficar na cozinha por bastante tempo e as condições ambientais não se modificarem, indique, justificando, a temperatura ambiente da cozinha.
5. Em determinada fase de crescimento e a partir de um certo peso inicial p_0 um porco engorda 8% ao mês.
Ao fim de quantos meses, arredondados às unidades, ele atingirá o dobro do peso p_0 ?
6. A massa de substância radioactiva em certa amostra calcula-se por $A(t) = 500 \times e^{-0,09.t}$ com t em anos e $A(t)$ em gramas. Quantas gramas havia no início da contagem do tempo? E 10 anos depois?
7. A função: $P(x) = 25000 \left(\frac{4}{3}\right)^{-x}$, $x \geq 0$ é usada para determinar o valor, em euros, de um carro, x anos depois da sua compra.
- Qual o custo inicial do carro?
 - Determine o valor do carro 18 meses após a sua compra.
 - Quanto desvaloriza o carro ao ano?
8. A desvalorização de um automóvel de luxo é dada pela função $P(t) = 100e^{-0,12t}$ onde P é em milhares de euros e t o tempo, em anos, decorrido após a compra.
- Qual é o valor do automóvel três anos após a compra?
 - Determine x tal que, para qualquer t , $P(t+x) = \frac{1}{2}P(t)$.
Apresente o resultado arredondado às centésimas. Interprete o valor obtido, no contexto da situação descrita.
 - t anos após a compra, o automóvel foi vendido por 35 000 euros. Quantos anos tinha o automóvel quando foi vendido?
9. Um jardineiro foi aumentado, nos últimos 10 anos, 5% ao ano. Hoje ganha 2000 euros. Quanto ganhava há 3 anos?
10. Considere um produto que actualmente tem um valor de 3000 euros. Admita que o produto vai aumentar de valor nos próximos 6 anos em 20% ao ano e nos 6 anos seguintes vai diminuir de valor 20% ao ano. Determine o valor do produto, com aproximação às unidades, no final dos 12 anos referidos.

11. Um som de nível A decibéis está relacionado com a sua intensidade I pela equação

$$A = 10 \log I$$

com $I > 0$, expresso em unidades adequadas.

- Um som com 1000 unidade de intensidade atinge quantos decibéis?
- De um local próximo, os níveis de ruído provocados por um camião e por um avião a jacto são, respectivamente, 100 e 200 decibéis. Qual a razão entre a intensidade de ruído provocado pelo avião a jacto e a do ruído do camião?
- Exprima I em função de A .

12. A magnitude dos tremores de terra é habitualmente medida na Escala de Richter. Nesta escala a magnitude M de um abalo sísmico está relacionado com a energia libertada E , em ergs, da seguinte forma:

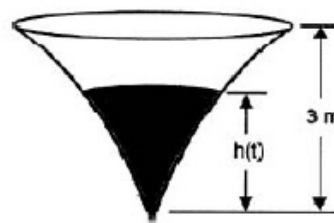
$$M = \frac{\log E - 11,8}{1,5}$$

- Um dos tremores de terra mais célebre ocorreu em S. Francisco, EUA, em 1906 e libertou $1,496 \times 10^{24}$ ergs de energia. Qual foi a magnitude na Escala de Richter?
 - Qual a energia libertada (em ergs) por um sismo de magnitude 8,5 na Escala de Richter?
 - Exprima a variável E em função de M .
 - Cada acréscimo de uma unidade de magnitude, na Escala de Richter, resulta da energia libertada ser multiplicada por um factor. Qual o valor desse factor?
13. No centro de um lago circular de 10 m de raio, observou-se um círculo de uma espécie de plantas. Os biólogos estimam que a área A , em m^2 coberta pelas plantas t meses após a primeira observação é dada por:

$$A(t) = 2,3e^{0,4t}$$

- Determine A para $t = 0$ e interprete o valor obtido no contexto da situação apresentada.
- Verifique que, para qualquer valor de t , $\frac{A(t+1)}{A(t)}$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante e interprete o valor no contexto da situação descrita.
- Determine x , tal que: $A(t+x) = 3A(t)$. Interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.
- Determine o valor numérico de t , de modo que todo o lago esteja coberto com as referidas plantas.

14. A figura representa um reservatório com três metros de altura. Considere que, inicialmente, o reservatório está cheio de água e que, num certo instante, se abre uma válvula e o reservatório começa a ser esvaziado, ficando vazio ao fim de catorze horas.



Admita que a altura, em metros, da água no reservatório, t horas após este ter começado a ser esvaziado, é dada por:

$$h(t) = \log_2(a - bt), t \in [0, 14]$$

onde a e b são constantes reais positivas.

- Mostre que $a = 8$ e que $b = \frac{1}{2}$.
 - Prove que a taxa de variação média de h no intervalo $[6, 11]$ é $-0,2$. Interprete este valor no contexto da situação descrita.
15. Na cidade de Ulam Bator surgiu uma epidemia de gripe. A evolução da doença é dada por

$$P(t) = e^{0,4t - 0,01t^2}$$

onde P representa a percentagem de pessoas doentes e t o tempo em dias.

- Qual a percentagem de pessoas doentes quando começou o estudo da epidemia?
- Qual foi o pior momento da epidemia e qual a percentagem de doentes?
- A epidemia considera-se erradicada quando a percentagem de doentes for inferior a 1%. Quando é que tal aconteceu?
- No 15º dia, qual a probabilidade do presidente da Câmara estar doente?

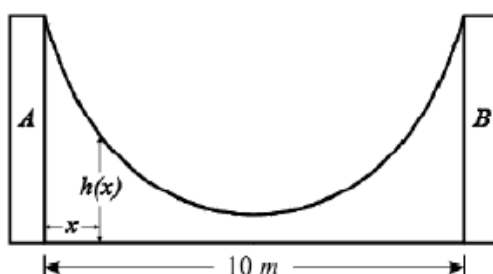
16. A expressão $D = 5 \times e^{-0,4t}$ é usada para determinar o número D de miligramas de um fármaco na corrente sanguínea de um indivíduo, t horas depois de lhe ter sido administrado um medicamento.

- Se o número de mg de medicamento no sangue for inferior a 0,5 mg, o doente tem de ser hospitalizado. Querendo evitar esta situação, qual o maior intervalo de tempo entre duas tomadas de medicamento? Apresente o resultado aproximado ao minuto.
- Quanto tempo demora a reduzir-se a metade a quantidade de medicamento que é administrada? Apresente o resultado em horas e minutos.
- Para um outro medicamento, o número de g no sangue, t horas depois de ser tomado, é dado por

$$M(t) = 4 \times e^{-0,2t}$$

Se os dois medicamentos forem tomados à mesma hora, quanto tempo depois a quantidade dos dois medicamentos são iguais? Apresente o resultado em minutos, arredondados às unidades.

17. Uma rampa de desportos radicais foi construída entre duas paredes A e B , distanciadas de 10 metros, como se mostra na figura.



Considere a função h definida por

$$h(x) = 15 - 4 \ln(-x^2 + 10x + 11)$$

Admita que $h(x)$ é a altura, em metros, do ponto da rampa situado x metros à direita da parede A .

- Determine a altura da parede A . Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.
- Para que valores de x é mínima $h(x)$?
- Mostre, analiticamente, que $h(5 - x) = h(5 + x)$.

Interprete esta igualdade no contexto da situação descrita.

Soluções

Parte I

Questões de escolha múltipla

1-B	2-C	3-C	4-B
5-D	6-C	7-A	8-D
9-B	10-C	11-A	12-B

Parte II

Questões de resposta aberta

1. 8 780
2.
 - a) 384 toneladas
 - b) 98 euros
3.
 - a)
 - b) 100 watts por metro quadrado
4.
 - a) 270°C
 - b) 1 hora e 31 minutos
 - c) 20°C
5. Ao fim de 9 meses
6. 500 gramas; 203,3 gramas
7.
 - a) 25 000 €
 - b) 16 238 €
 - c) 25 %
8.
 - a) 69,77 milhares de euros
 - b) $x = 5,77$.
Interpretação: a um aumento de 5,77 corresponde uma redução do valor do automóvel para metade.
 - c) 9 anos
9. 1727,68 €
10. 2348 €
11.
 - a) 30
 - b) 100
 - c) $I = 10^{0,14}$
12.
 - a) 8.25
 - b) $\approx 3,55 \times 10^{24}$
 - c) $E = 10^{1,5M+11,8}$
 - d) $10^{1,5} \approx 31,6$
13.
 - a) 2,3 m²
 - b) $\approx 1,5$; A área ocupada pelas plantas aumenta 50% em cada mês.
 - c) $x \approx 2,7$; A área ocupada pelas plantas triplica em cada 2,7 meses.
 - d) $t \approx 12,3$
- 14.
15.
 - a) 1%
 - b) 20º dia; 54,6%
 - c) a partir do 40º dia
 - d) 42,5%
16.
 - a) $\approx 5h\ 45m$
 - b) $\approx 1h\ 44m$
 - c) $\approx 67m$
17.
 - a) 5,4 m
 - b) 5 m
 - c) Os pontos equidistantes do ponto central ($x = 5$) têm a mesma altura.

COLÉGIO DA RAINHA SANTA ISABEL

TEMA: Funções Exponenciais e Logarítmicas

MATEMÁTICA – 12º ANO

Das seguintes afirmações, diga, justificando, quais são falsas.

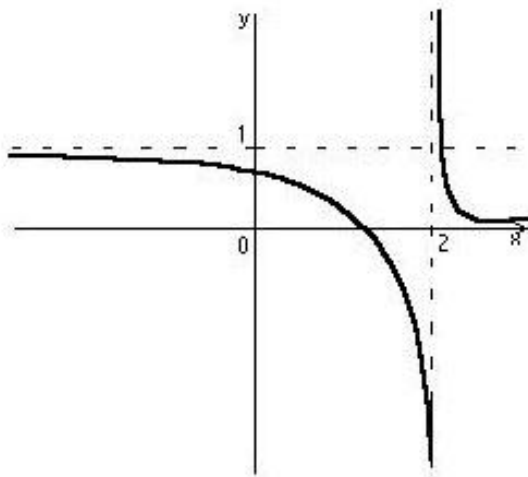
- (A) A função $f(x) = (-3)^x$ é uma função exponencial.
- (B) A função $f(x) = x^2$ é uma função exponencial.
- (C) A função $f(x) = 3^x$ é uma função invertível.
- (D) Se $3^x = -\frac{1}{27}$, então $x = -3$.
- (E) Se $f(x) = 3^x$ e $f(t) = 9$, então $t = 2$.
- (F) Se $f(x) = 2^x$, então $f(0) = 0$.
- (G) Se $f(x) = e^x$, então $f(0,5) = \sqrt{e}$.
- (H) A função exponencial $f: x \mapsto y = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$ é uma função decrescente.
- (I) Os gráficos das funções f e g têm as mesmas assíntotas, sendo:
 $f: x \mapsto y = 2^{x-1}$ e $g: x \mapsto (0,5)^{1-x}$.
- (J) O gráfico de uma função da família:
 $f: x \mapsto y = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$ tem uma assíntota vertical.
- (K) $\log 100 = 2$.
- (L) Se $f(x) = \log_2(x)$, então $f^{-1}(x) = 2^x$.
- (M) $2^{\log_2 100} = 100$.
- (N) $\ln(e^5) = 5$.
- (O) $e^{\ln(x)} = x$.
- (P) $\log(10^2) + \log(10^5) = \log(10^7)$.
- (Q) $\log(64) - \log(32) = \log(2)$.
- (R) A função $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ é idêntica à função $g(x) = 2^0$.

COLÉGIO DA RAINHA SANTA ISABEL

TEMA: Definição de limite de uma função num ponto (Segundo HEINE)

MATEMÁTICA – 12º ANO

1. Na figura está parte da representação gráfica de uma função f , cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.



é $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

As rectas $x=2$, $y=1$ e $y=0$ são assíntotas do gráfico de f .

- 1.1. Seja (U_n) a sucessão de termo geral $U_n = 2 - n^2$. O limite de $f(U_n)$ é:

- (A) 0 (B) 1 (C) $-\infty$ (D) $+\infty$

- 1.2. Indique o valor de:

1.2.1. $\lim f(U_n)$ sabendo que $U_n = 2 - \frac{1}{n}$

1.2.2. $\lim f(U_n)$ sabendo que $U_n = \frac{1+2n}{n}$

1.2.3. $\lim f(U_n)$ sabendo que $U_n = n+1$

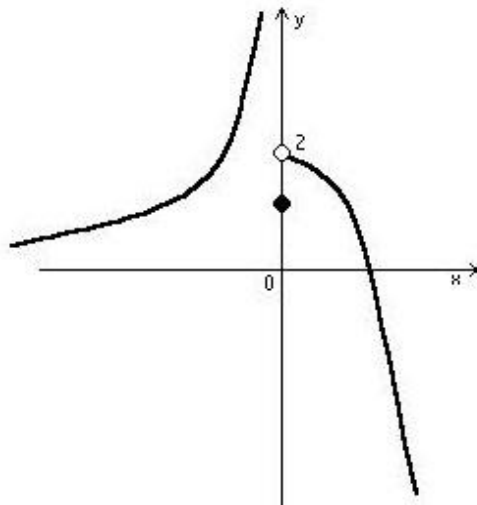
2. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \leq 1 \\ 2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Seja (U_n) a sucessão definida por $U_n = f(1 + \frac{1}{n})$. Indique qual das expressões seguintes define o termo geral de (U_n) :

- (A) $5 + \frac{1}{n}$ (B) $1 + \frac{1}{n}$ (C) $2 + \frac{2}{n}$ (D) $3 + \frac{3}{n}$

3. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g de domínio $\mathbb{R}$.



3.1. Considere a sucessão de termo geral $U_n = \frac{1}{n}$. Indique o valor de $\lim g(U_n)$.

- (A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) $+\infty$

3.2. Indique o valor de:

3.2.1. $\lim f(U_n)$ sabendo que $U_n = 1 - n^2$

3.2.2. $\lim f(g_n)$ sabendo que $g_n = \frac{-1}{n^2 + 1}$

4. Seja a função $f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{se } x > 0 \\ -5x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

4.1. Mostre que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

4.2. Defina uma função g tal que $\lim_{x \rightarrow 0} (f + g)(x) = 3$

5. A função h está definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

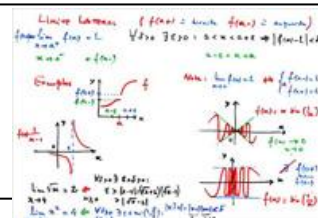
Considere $a_n = -\frac{2}{n}$, $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ e $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Calcule $\lim h(a_n)$, $\lim h(b_n)$ e $\lim h(c_n)$, caso existam.

6. Determine k de modo que a função f tenha limite quando $x \rightarrow -1$, sabendo que f está definida da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2k & \text{se } x \leq -1 \\ x^2 - k + 1 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

Ficha de Trabalho

- Limites de funções



Instruções

1. Sendo $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x < 1 \\ x + 4 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Prove que embora 1 não pertença ao domínio da função, existe e é igual a 5, o limite de f quando x tende para 1.

2. Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{se } x < -1 \\ x + 3 & \text{se } x > -1 \end{cases}$

2.1. Esboce o gráfico de g .

2.2. Mostre que não existe $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$.

3. Sendo s uma função, real de variável real, tal que, $s(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x > 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \\ 3x - b & \text{se } x < 2 \end{cases}$

Calcule b de modo que $\lim_{x \rightarrow 2} s(x)$ exista.

4. Calcule:

4.1. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{3 - x}$

4.2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x - 1)^2}$

4.3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$

4.4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{5x + 3}}{x}$

4.5. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{9 - x^2}$

4.6. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x + 1}$

5. Considere a função real de variável real $h(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x < 0 \\ 4 & \text{se } x = 0 \\ 2x^3 + 3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

5.1. Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 3$

5.2. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$

6. Calcule, se existir, cada um dos limites seguintes:

6.1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{(x + 1)^2}$

6.2. $\lim_{x \rightarrow 3} 5$

6.3. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 3x + 2)$

6.4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 4)$

6.5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{x^2}$

6.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x + 4}{x + 1}}$

6.7. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 3}$

6.8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4 - 6x^3)$

6.9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3}$

$$6.10. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 27}{x^3 - 9x}$$

$$6.11. \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4x - 3}{x + 1}$$

$$6.12. \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{x - 3}$$

$$6.13. \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2}{x - 3}$$

$$6.14. \lim_{x \rightarrow 1} \left((x^2 - 1) \times \frac{3x + 2}{x - 1} \right)$$

$$6.15. \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \times \frac{4x + 3}{x^2 + 3x} \right)$$

$$6.16. \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{1}{4 - x^2} - \frac{1}{x + 2} \right)$$

$$6.17. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 3x + 1)$$

$$6.18. \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{10 + 5x - x^3}$$

7. Considere a função g definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 4}$.

7.1. Indique o domínio de g .

7.2. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

7.3. Depois de determinar os limites laterais para $x=2$, diga se existe $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

8. Sendo a função h definida, em $\mathbb{R}$, por $h(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 3 \\ x^2 - 3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$

8.1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 5} h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.

8.2. Investigue se existe $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$, calculando os respectivos limites laterais.

9. Sendo a função t definida, em $\mathbb{R}$, por $t(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < -1 \\ x + 1 & \text{se } -1 < x < 2 \\ 3x - 2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

9.1. Investigue se existem os limites $\lim_{x \rightarrow -1} t(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} t(x)$

10. Considere as funções, reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = 2x + \left(\frac{\sqrt{x^2}}{|x|} \right); \quad g(x) = 2x + \left(\frac{|x| + 2}{x^2 - 4} \right); \quad h(x) = 2x + \left(\frac{|x| + x}{x - 3|x|} \right)$$

10.1. Determine os seus domínios.

10.2. Averigüe se existe o limite de cada uma das funções quando x tende para zero.

11. Considere as funções, definidas em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{se } x \geq 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

11.1. Verifique se existem $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

11.2. Defina, em $\mathbb{R}$, a função $f + g$ e calcule, se existir, $\lim_{x \rightarrow 0} (f + g)(x)$.

11.3. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f + g)(x)$.

Soluções:

1. Limites laterais iguais

2.1 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$. Logo não existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow 2^+} s(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} s(x) \Leftrightarrow b = 3$

4.1 $-\infty$

4.2 $+\infty$

4.3 1

4.4 $+\infty$

4.5 0

4.6 $+\infty$

5.1 $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = 3$

5.2 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 5$

6.1 $-\infty$

6.2 5

6.3 0

6.4 $+\infty$

6.5 0

6.6 2

6.7 $\frac{1}{7}$

6.8 (ind) $+\infty$

6.9 (ind) 4

6.10 (ind) 0

6.11 $+\infty$

6.12 $+\infty$

6.13 $-\infty$

6.14 10

6.15 0

6.16 $-\infty$

6.17 $+\infty$

6.18 2

7.1 $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

7.2 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -4$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$

7.3 Não existe limite

8.1 $\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = 10$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$

8.2 Existe limite. $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 6$

9. Não existe nenhum dos limites

10.1 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$; $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

10.2 Não existe limite, quando x tende para zero de h. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\frac{1}{2}$

11.1 Não existe limite, quando x tende para zero, nem de f nem de g.

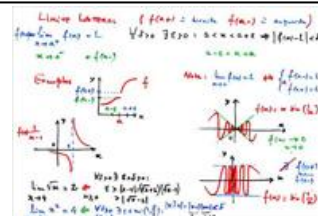
11.2 $f + g = \begin{cases} -x + 2 & \text{se } x \geq 0 \\ x + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (f + g)(x) = 2$

11.3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f + g)(x) = -\infty$

Ficha de Trabalho

- Limites de funções
- Indeterminações
- Limites de referência



Instruções

I – Determine:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x - 1)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^2 + x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^5}{x^5 + x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(2x + 3) \times x^2]$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 3}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x}{3}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2^x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{1-x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5}{(x-2)^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{2x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 3x)^5$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3 \ln x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x - 1)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \times 3x \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{3}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x^2 - 1} \times (x + 1) \right]$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln x)$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{3}$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x)$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - x^2 + 7x)$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x-2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x^2 - 2}{2x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 3})$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

II - Calcule cada um dos seguintes limites, recorrendo, quando necessário, aos limites notáveis.

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{x-1}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{x-1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1}$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{x^2 - x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - x \ln x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - x \ln x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x-1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(x + \frac{1}{x} \right) - \ln x \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 3x^2 e^{-x})$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 3x^2 e^{-x})$

$$13. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{x}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{3x}}{2x}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^x}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{3x}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{x^2}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{e^{x-2} - 1}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{5x}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2x + 2)}{x}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{\ln x}$$

Soluções:

I.

1) $+\infty$ 2) $+\infty$ 3) $+\infty$ 4) -1 5) $-\infty$ 6) 0 7) 0 8) $+\infty$ 9) $+\infty$ 10) 0 11) Não existe

12) 0 13) $-\infty$ 14) $+\infty$ 15) $-\infty$ 16) $+\infty$ 17) $+\infty$ 18) 3 19) $+\infty$ 20) 0 21) $+\infty$

22) 0 23) $\frac{1}{3}$ 24) $\frac{1}{4}$ 25) $+\infty$ 26) $\frac{1}{6}$ 27) $+\infty$ 28) $-\infty$ 29) $-\infty$ 30) $-\infty$ 31) 0

32) $-\infty$ 33) 0 34) 4

II.

1) $+\infty$ 2) Não existe 3) $+\infty$ 4) $+\infty$ 5) 0 6) $-\infty$ 7) 0 8) $-\infty$ 9) 0 10) 0 11) 1

12) $+\infty$ 13) 0 14) $+\infty$ 15) -1 16) $-\infty$ 17) e 18) $-\frac{1}{3}$ 19) 2 20) $+\infty$ 21) 4

22) 0 23) $+\infty$ 24) $+\infty$

Ficha de Trabalho

- Limite de função segundo Heine
- Propriedades operatórias sobre limites
- Indeterminações

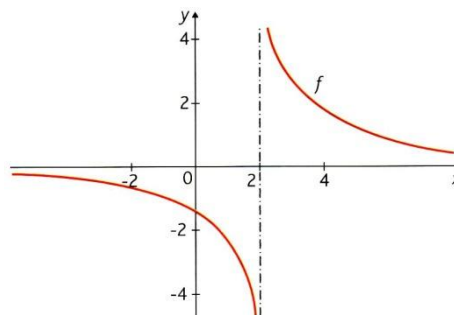
- Continuidade
- Teorema de Bolzano – Cauchy
- Assintotas



Parte I

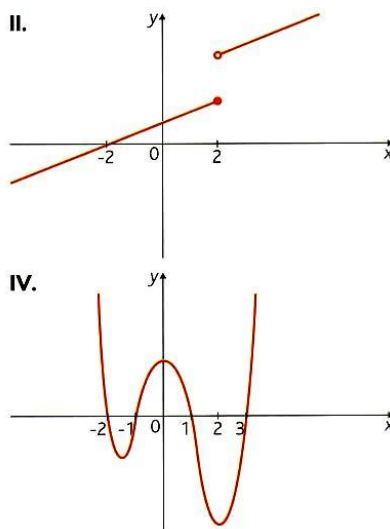
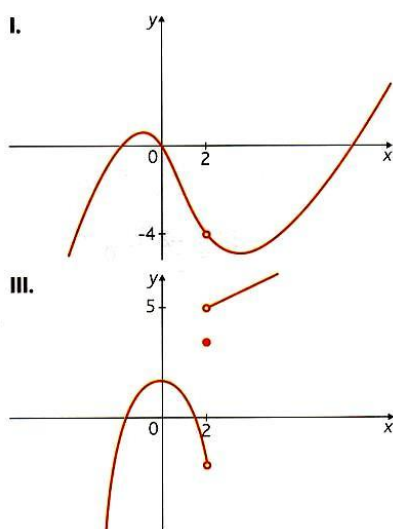
Escolha Múltipla

1. Considere a representação gráfica da função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ e a sucessão de termo geral $X_n = 2 + \frac{1}{n}$.



Qual o valor de $\lim f(X_n)$?

- A. 1 B. 2 C. $-\infty$ D. $+\infty$
2. Considere a função, real de variável real, definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = 2x + 3$ e a sucessão de termo geral $X_n = \frac{1}{n}$. Qual o valor de $\lim f(X_n)$?
- A. 0 B. 2 C. 1 D. 3
3. Considere as seguintes representações gráficas de funções reais de variável real:



Em que casos podemos afirmar que existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?

- A. I e II B. II e III C. II e IV D. I e IV
4. O valor real de k , de modo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{k+x} - e^k}{x} = 3$, é:

- A. 0 B. 1 C. $\ln 3$ D. 3
5. Os valores de $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{3x-2}{5-x}$ e de $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-4}{x^2-x}$ são respectivamente:

- A. $+\infty$ e $-\infty$ B. $-\infty$ e $+\infty$ C. $+\infty$ e $+\infty$ D. $-\infty$ e $-\infty$
6. A equação $x^4 - 8,5x^3 + 9x^2 + x - 7 = 0$ tem pelo menos um zero no intervalo:
1. $[3,4]$ B. $[4,5]$ C. $[6,8]$ D. $[8,9]$

Ficha de Trabalho

- o Limite de função segundo Heine
- o Propriedades operatórias sobre limites
- o Indeterminações

- o Continuidade
- o Teorema de Bolzano – Cauchy
- o Assíntotas



7. Considere a família de funções definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x > 3 \\ kx^2 + x & \text{se } x \leq 3 \end{cases}$$

O valor de k para que uma função desta família seja contínua em $x=3$ é:

- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{3}$ D. 1

8. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, tal que $f(2)=-3$ e $f(4)>0$.

Para qual das seguintes funções podemos garantir a existência de pelo menos um zero no intervalo $[2,4]$?

- A. $g(x)=f(x)-2$ B. $g(x)=f(x)+2$ C. $g(x)=f(x)-4$ D. $g(x)=f(x)+4$

9. Considere a função definida por $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^2 - 4}$.

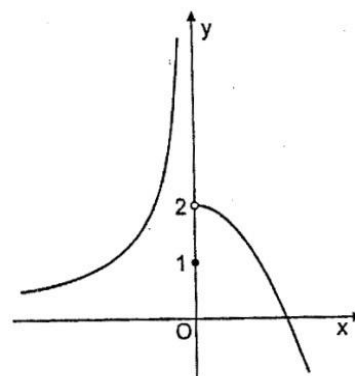
Em qual das opções seguintes se encontram as equações de todas as rectas que são assíntotas do gráfico de f ?

- A. $x=2$; $x=-2$; $y=x-5$ B. $x=2$; $x=-2$; $y=-5$
C. $x=2$; $y=x-5$ D. $x=-2$; $y=x-5$

10. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g de domínio $\mathbb{R}$ e contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Considere a sucessão de termo geral $U_n = \frac{1}{n}$. Indique o valor de $\lim g(U_n)$.

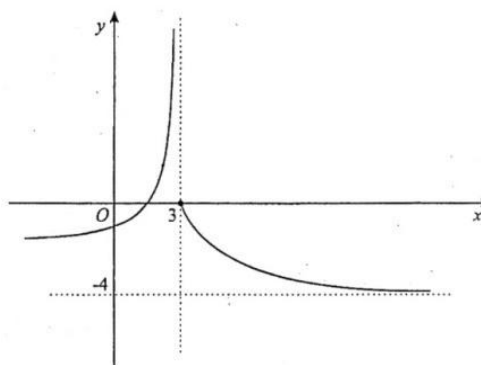
- A. $+\infty$ B. 0 C. 1 D. 2



11. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função f , cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. A recta de equação $x=1$ é uma assíntota vertical do gráfico de f .

Considere a sucessão de termo geral $X_n = 1 + \frac{1}{n}$ e seja $U_n = f(X_n)$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- A. $\lim U_n = -\infty$ B. $\lim U_n = 1$ C. $\lim U_n = +\infty$ D. Não existe $\lim U_n$



Ficha de Trabalho

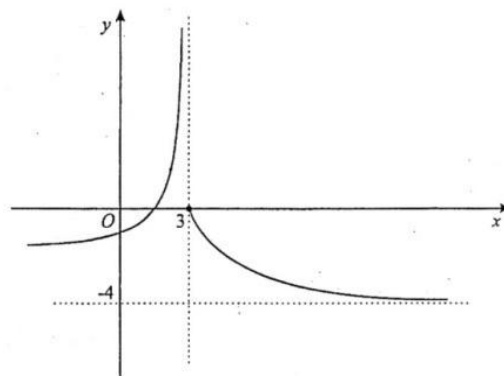
- o Limite de função segundo Heine
- o Propriedades operatórias sobre limites
- o Indeterminações
- o Continuidade
- o Teorema de Bolzano – Cauchy
- o Assíntotas



12. Na figura está representada parte do gráfico de uma função g de domínio $\mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

As rectas de equações $x=3$ e $y = -4$ são as únicas assíntotas do gráfico g .

Seja (X_n) uma sucessão tal que $\lim X_n = +\infty$. Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão X_n ?



- A. $3 - \frac{1}{n}$ B. $-4 - \frac{1}{n}$ C. $3 + \frac{1}{n}$ D. $-4 + \frac{1}{n}$

13. De uma função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a recta de equação $y = -2x+1$ é uma assíntota do seu gráfico. Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?

- A. $-\infty$ B. -2 C. 1 D. $+\infty$

14. O gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 0,1 + 0,2e^{0,3x}$, tem uma única assíntota. Qual das condições seguintes é uma equação dessa assíntota?

- A. $y=0$ B. $y=0,1$ C. $y=0,2$ D. $y=0,3$