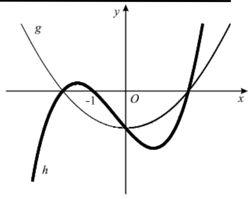
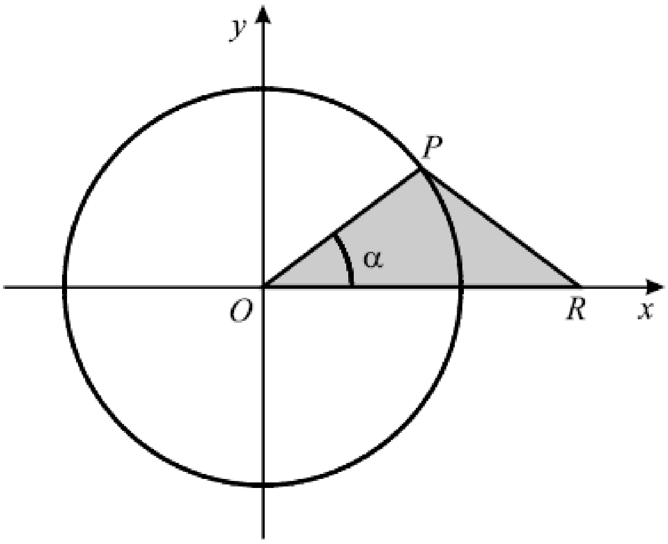
Preparação para o intermédio



Escolha múltipla

1. Na figura está representado o círculo trigonométrico e um triângulo [QPR].



O ponto P desloca-se ao longo da circunferência, no 1º quadrante.

O ponto R desloca-se ao longo do eixo Ox, de tal modo que o triângulo [OPR] é sempre isósceles.

Sendo α a amplitude, em radianos, do ângulo ROP, qual das expressões seguintes dá a área do triângulo [POR], em função de α?

A) $\text{sen}\alpha.\cos\alpha$ B) $2\text{sen}\alpha.\cos\alpha$

C) $\dfrac{1+\text{sen}\alpha.\cos\alpha}{2}$ D) $\dfrac{(1+\cos\alpha).\text{sen}\alpha}{2}$

2. Da amplitude α de um certo ângulo orientado sabe-se que cos α<0 e tgα>0.

Qual das expressões seguintes dá o valor de senα?

A) $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ B) $-\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

C) $\sqrt{1+\cos^2\alpha}$ D) $-\sqrt{1+\cos^2\alpha}$

3. Num referencial o.n. Oxyz, sejam α e β os planos definidos pelas equações:

α: x+y-z=1 e β: 2x+2y-2z=1.

A intersecção dos planos α e β é:

A) O conjunto vazio B) Um ponto C) Uma reta D) Um plano

4. Sabe-se que $\beta \epsilon IR$ é uma solução da equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{5}$.

Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\cos x = -\frac{1}{5}$?

A) $\pi + \beta$

B) $\frac{\pi}{2} + \beta$

C) $-\beta$

D) $\frac{\pi}{2} - \beta$

5. Na figura 1 está representada graficamente a função f.
Na figura 2 está representada graficamente a função g.

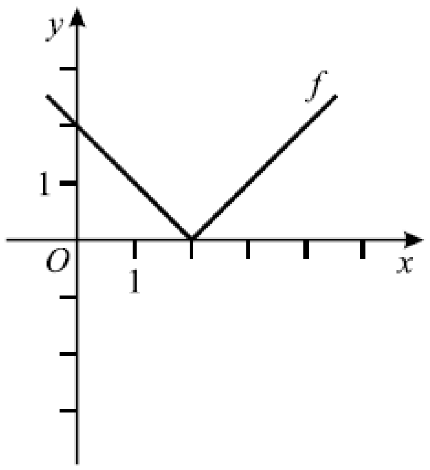


Figura 1

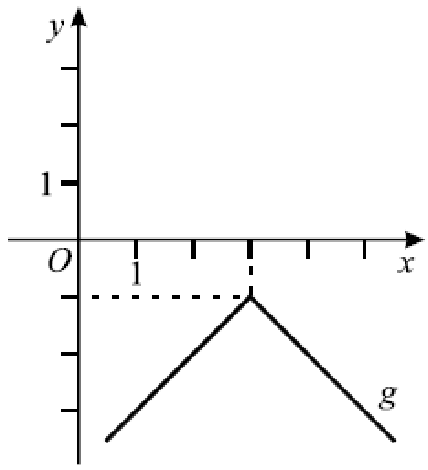


Figura 2

Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

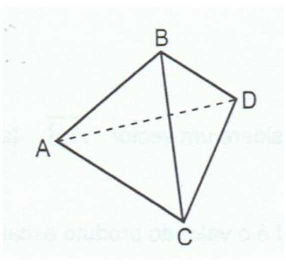
A) $g(x) = -f(x+1) - 1$

B) $g(x) = f(x+1) + 1$

C) $g(x) = f(x+1) - 1$

D) $g(x) = -f(x-1) - 1$

6. Na figura está representado um tetraedro regular.



- A, B, C e D são os vértices do tetraedro
- $\overline{AB} = 6$

O valor do produto escalar $\overrightarrow{BC} . \overrightarrow{BD}$ é

A) 18

B) $18\sqrt{2}$

C) 36

D) $36\sqrt{2}$

7. Num referencial o.n. Oxyz, considera um ponto A pertencente ao semieixo positivo Ox e um ponto B pertencente ao semieixo positivo Oy. Quais das seguintes podem ser as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$?

A) $(-2;0;1)$ B) $(2;0;-1)$ C) $(-2;1;0)$ D) $(2;-1;0)$

8. Considere o seguinte problema:
"Uma frutaria confecciona dois tipos de bebidas com sumo de laranja e sumo de manga.
Bebida X: com um litro de sumo de laranja por cada litro de sumo de manga.
Bebida Y: com dois litros de sumo de laranja por cada litro de sumo de manga.
Para confeccionar estas bebidas, a frutaria dispõe diariamente de 12 litros de sumo de laranja e de 10 litros de sumo de manga. Cada litro de bebida X dá um lucro de 4 € e cada litro de bebida Y dá um lucro de 5 €. Supondo que a frutaria vende diariamente toda a produção destas bebidas, quantos litros de bebida X e quantos litros de bebida Y deve confeccionar por dia para maximizar o lucro?"
Sendo x o número de litros de bebida X e sendo y o número de litros de bebida Y, qual das opções seguintes traduz correctamente este problema?

A) Maximizar 4x+5y , sujeito a:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} \leq 12 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leq 10 \end{cases}$$

B) Maximizar 12x+10y , sujeito a:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} \leq 5 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leq 4 \end{cases}$$

C) Maximizar 4x+5y , sujeito a:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 12 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$$

D) Maximizar 12x+10y , sujeito a:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 5 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$$

9. De dois vectores $\vec{p}$ e $\vec{q}$ sabe-se que têm ambos norma igual a 3 e que $\vec{p}.\vec{q} = -9$.
Indique qual das afirmações é verdadeira.

A) $\vec{p} + \vec{q} = \vec{0}$

B) $\vec{p} - \vec{q} = \vec{0}$

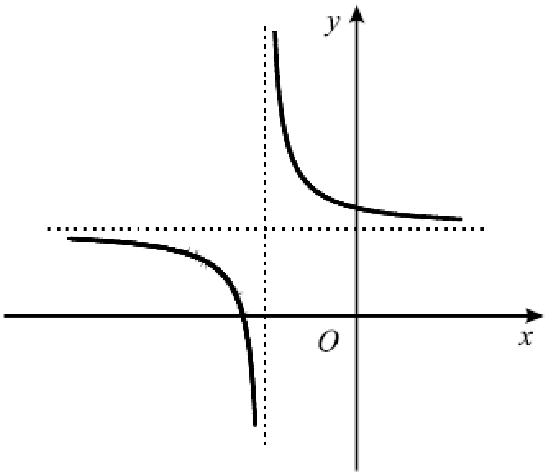
C) $\vec{p} \perp \vec{q}$

D) O ângulo dos vectores $\vec{p}$ e $\vec{q}$ é agudo

10. Num referencial o.n. Oxyz, considere os pontos P=(0,0,4) e Q=(0,4,0). Qual dos seguintes pontos pertence ao plano mediador do segmento de reta [PQ]?

A) $(1;0;0)$ B) $(1;2;0)$ C) $(2;1;0)$ D) $(1;0;2)$

11. Para um certo valor de a e para um certo valor de b, a expressão $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$ define a função f cujo gráfico está parcialmente representado na figura.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

A) $a > 0 \wedge b > 0$ B) $a > 0 \wedge b < 0$ C) $a < 0 \wedge b > 0$ D) $a < 0 \wedge b < 0$

12. Considere, num referencial o.n. Oxyz, dois planos concorrentes, de equações $x - y + 3z = 1$ e $x + y - 7z = 7$.

Seja r a reta de intersecção dos dois planos.

Qual dos pontos seguintes pertence à reta r?

A) $(5;5;0)$ B) $(1;0;0)$ C) $(0;0;-1)$ D) $(4;3;0)$

13. Num referencial o.n. Oxyz, considere as retas r e s, definidas por:

$r : x - 2 = y - 1 = z - 3$

$s : (x, y, z) = (2,1,3) + k(1,0,1),\ k \in IR$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

A) r e s são concorrentes

B) r e s não são complanares

C) r e s são paralelas

D) r e s são perpendiculares

14. Considere, num referencial o.n. Oxyz:

- O plano α, de equação 2x+2y+2z=5
- A reta r, definida pela consição x=y=z

Qual é a posição relativa da reta r e do plano α?

A) r é perpendicular a α
B) r e α são concorrentes, mas não perpendiculares
C) r é estritamente paralela a α
D) r está contida em α

15. Num referencial o.n. Oxyz, considere o plano α, de equação x+y=4.
O plano α é
A) Paralelo a xOy
B) Perpendicular ao plano xOy
C) Paralelo ao eixo Ox
D) Perpendicular ao eixo Ox

16. Sejam α e β dois planos perpendiculares.
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
A) Qualquer reta paralela a α é paralela a β.
B) Qualquer reta paralela à intersecção de α e β é paralela a β.
C) Qualquer reta perpendicular a α é perpendicular a β.
D) Qualquer reta perpendicular à intersecção de α e β é perpendicular a β.

17. Num referencial o.n. Oxyz, a condição $\begin{cases} 3x+4y+5z=2 \\ \frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5} \end{cases}$ define

E) Um ponto
F) O conjunto vazio
G) Uma reta
H) Um plano

18. Qual das seguintes equações define, num referencial o.n. Oxyz, uma superfície esférica tangente aos planos de equações x=4 e y=0?

A) $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=4$

B) $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=16$

C) $x^2+y^2+(z-2)^2=4$

D) $(x-2)^2+y^2+z^2=16$

19. Num referencial o.n. Oxyz, a intersecção das superfícies esféricas definidas pelas equações

$x^2+(y-2)^2+z^2=2$ e $x^2+(y-3)^2+z^2=2$ é

A) Um ponto
B) Uma superfície esférica
C) Uma circunferência
D) um segmento de reta

20. Se $|\text{sen}x|=1$, então podes concluir que:

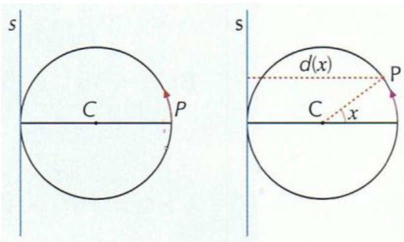
A) $x=k\pi, \quad k\in Z$

B) $x=k\frac{\pi}{2}, \quad k\in Z$

C) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \quad k\in Z$

D) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in Z$

21. Considera uma circunferência de centro C e raio 2, tangente a uma reta s. Um ponto P começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura.



Seja $d(x)$ a distância de P a s, após uma rotação de amplitude x.

Qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer número real positivo x?

A) $d(x)=2+2\cos x$

B) $d(x)=2+\cos x$

C) $d(x)=2+2\text{sen}x$

D) $d(x)=2-2\cos x$

22. Dois ângulos representados no círculo trigonométrico têm amplitudes designadas por α e β que satisfazem a condição

$$\alpha\in\left]2\pi;\frac{5\pi}{2}\right[\wedge \text{sen}\beta.\text{tg}\alpha<0\wedge\frac{\cos\beta}{\text{tg}\alpha}>0$$

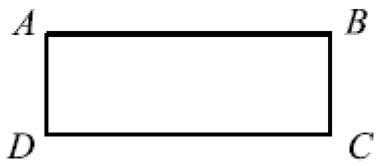
Podes concluir que o lado extremidade de β pertence ao

A) 2º quadrante
B) 1º quadrante
C) 4º quadrante
D) 3º quadrante

Resposta aberta

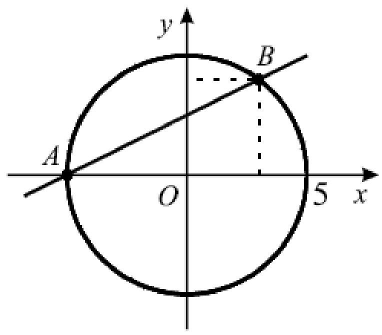
1. Um agricultor deseja semear trigo e milho numa área não superior a 160 hectares. Pretende semear pelo menos 50 hectares de trigo e pelo menos 30 hectares de milho.
   Sabe-se que:
   - o custo de produção de um hectare de trigo é 1500€.
   - o custo de produção de um hectare de milho é 1000€.
   e que:
   - cada hectare de trigo dá um lucro de 600€.
   - cada hectare de milho dá um lucro de 500€.
   Sabendo ainda que o agricultor não pode investir mais do que 200000€ nesta produção, quantos hectares de trigo e quantos hectares de milho deve o agricultor semear de modo que tenha um lucro máximo?

2. Na figura está representado um rectângulo [ABCD].



   Mostre que o produto escalar $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ é igual a $\overline{AB}^2$.

3. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy, uma reta AB e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5.
   Os pontos A e B pertencem à circunferência.
   O ponto A também pertence ao eixo das abcissas.



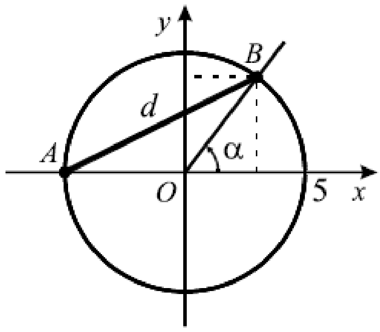
   3.1. Admitindo que o declive da reta AB é igual a $\frac{1}{2}$, resolva as três alíneas seguintes:

   3.1.1. Mostre que uma equação da reta AB é x-2y+5=0.

   3.1.2. Mostre que o ponto B tem coordenadas (3,4).

   3.1.3. Seja C o ponto de coordenadas (-3,16). Verifique que o triângulo [ABC] é rectângulo em B.

3.2. Admita agora que oponto B se desloca ao longo da circunferência, no primeiro quadrante.



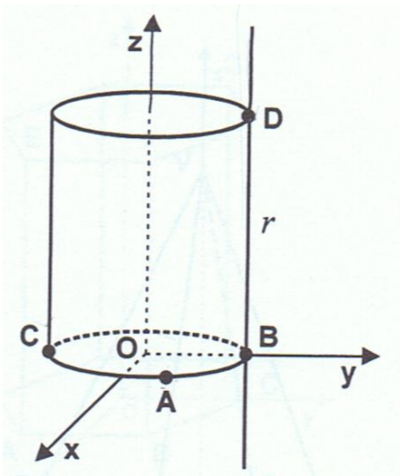
Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semi-reta OB.

Seja d o comprimento de [AB].

3.2.1. Mostre que $d^2 = 50 + 50\cos\alpha$.

3.2.2. Para uma certa posição do ponto B, tem-se $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{24}$. Sem recorrer à calculadora, determine, para este caso, o valor de d.

4. Considere, num referencial o.n. Oxyz, um cilindro de revolução como o representado na figura.



- A base inferior do cilindro tem centro na origem O do referencial e está contida no plano xOy.
- [BC] é um diâmetro da base inferior, contido no eixo Oy. O ponto C tem coordenadas (0,-5,0).
- O ponto A pertence à circunferência que limita a base inferior do cilindro e tem coordenadas (4,3,0).
- A reta r passa no ponto B e é paralela ao eixo Oz.
- O ponto D pertence à reta r e à circunferência que limita a base superior do cilindro.

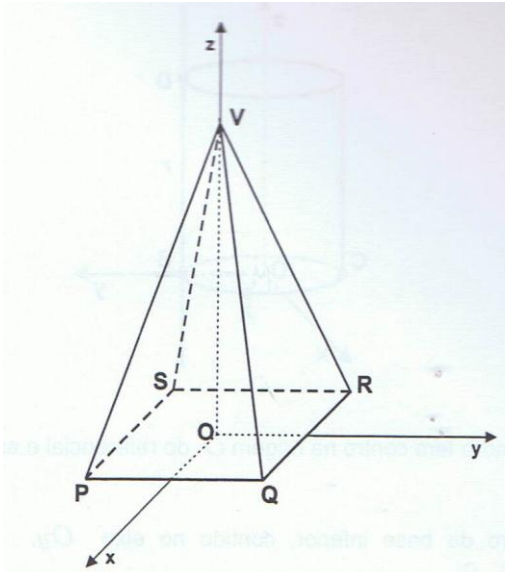
a. Justifique que a reta AC é perpendicular à reta AB.

b. Escreva uma equação vectorial da reta r.

c. Justifique $\overrightarrow{AC}$ é um vetor perpendicular ao plano ABD.
Determine uma equação deste plano.

d. Designando por α a amplitude do ângulo BOD, mostre que o volume do cilindro é dado por $V(\alpha) = 125\pi\operatorname{tg}\alpha$, com $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

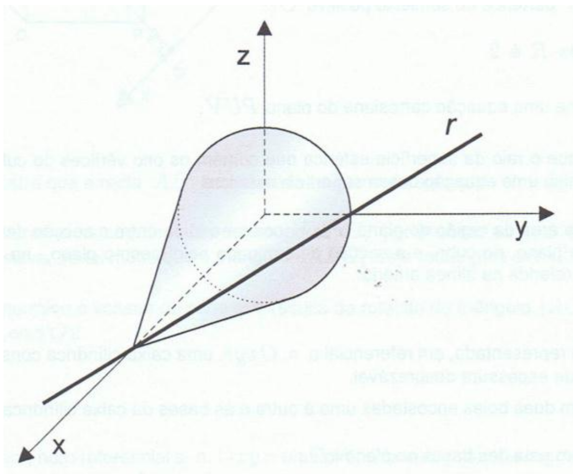
5. Considere, num referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide regular de base quadrada.



- O vértice V da pirâmide pertence ao semieixo positivo Oz.
- A base da pirâmide está contida no plano xOy.
- A aresta [PQ] é paralela ao eixo Oy.
- O ponto Q tem coordenadas $(2,2,0)$.

a. Sabendo que, na unidade considerada, o volume da pirâmide é igual a 32, mostre que a cota do vértice V é igual a 6.
b. Mostre que o plano QRV pode ser definido pela equação $3y+z=6$.
c. Determine uma condição que defina a reta que passa na origem do referencial e é perpendicular ao QRV.
d. Justifique que a intersecção da aresta [QV] com o plano de quação $z=3$ é o ponto $M=(1,1,3)$ e determine a área da secção produzida na pirâmide por esse plano.

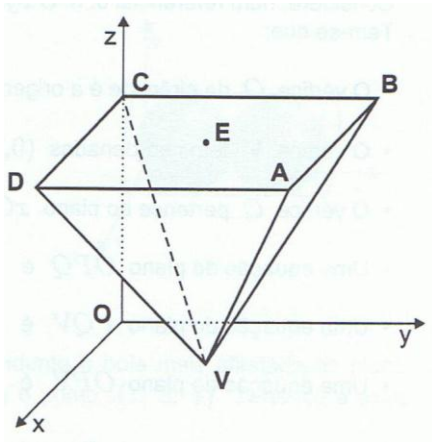
6. Num referencial o.n. Oxyz, considere um cone cuja base está contida no plano yOz e cujo vértice pertence ao semieixo positivo Ox.
A base tem raio 3 e centro em O, origem do referencial.
A reta r, de equação $(x,y,z)=(0,3,0)+k(3,-1,0)$, $k\in IR$, contém uma geratriz do cone.



a. Mostre que a altura do cone é 9.
b. Determine uma equação do plano que contém o vértice do cone e é perpendicular à reta r.
c. Determine a área do polígono que resulta da intersecção do cone com o plano de equação $z=0$.

7. Na figura está representada, em referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide quadrangular regular.

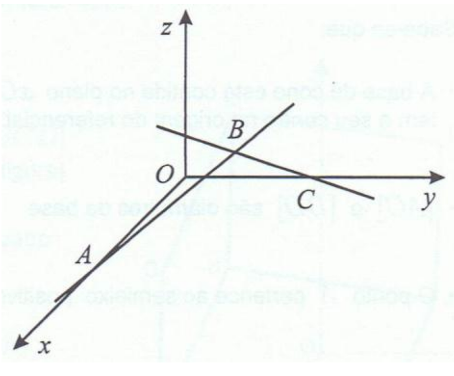
- A base da pirâmide é paralela ao plano xOy
- O ponto A tem coordenadas (8,8,7)
- O ponto B pertence ao plano yOz
- O ponto C pertence ao eixo Oz
- O ponto D pertence ao plano xOz
- O ponto E é o centro da base da pirâmide
- O vértice V da pirâmide pertence ao plano xOy



a. Determine o perímetro de uma face lateral da pirâmide.
b. Determine a amplitude do ângulo DVB.
   Apresente o resultado em graus, com aproximação à décima de grau.
c. Seja α o plano que contém o ponto E e é paralelo ao plano AVB. Mostre que o eixo Ox está contido em α.

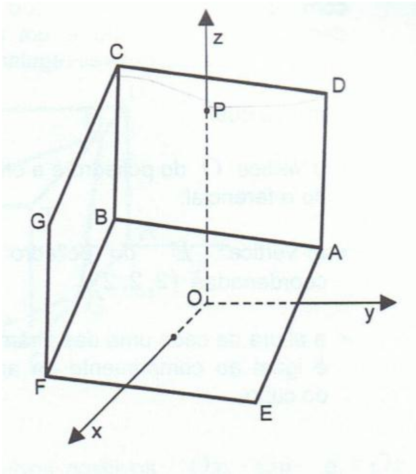
8. Considere, num referencial o.n. Oxyz:

- O ponto A = (10,0,0);
- O ponto B = (0,2,1);
- O ponto C = (0,5,0);
- A reta AB
- A reta BC



a. Justifique que as retas AB e BC são complanares e mostre que o plano α por elas definido admite como equação x+2y+6z=10.
b. Determine uma equação vectorial da reta de intersecção do plano α com oplano xOz.
c. Calcule o volume da pirâmide [OBCA].

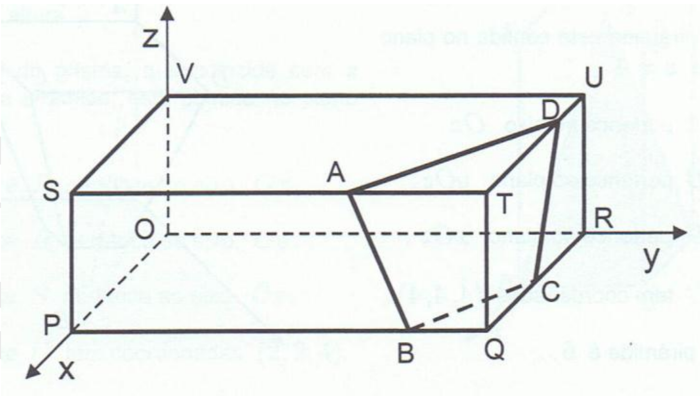
9. A figura abaixo representa um cubo, em referencial o.n. Oxyz.



- [ABCD] é uma face do cubo
- [EFGH] é a face oposta à face [ABCD] (O ponto H não está representado na figura)
- [AE], [BF], [CG] e [DH] são quatro arestas do cubo
- O ponto A tem coordenadas (3,5,3)
- O ponto D tem coordenadas (-3,3,6)
- O ponto E tem coordenadas (1,2,-3)

a. Determine o volume do cubo.
b. Determine as coordenadas do ponto H e comente a seguinte afirmação: o ponto H pertence a um dos eixos coordenados.
c. O ponto P é o ponto de intersecção do eixo Oz com a face [ABCD]. Determine as coordenadas de P.

10. Num referencial o.n. Oxyz, considere um paralelepípedo rectângulo [OPQRSTUV].



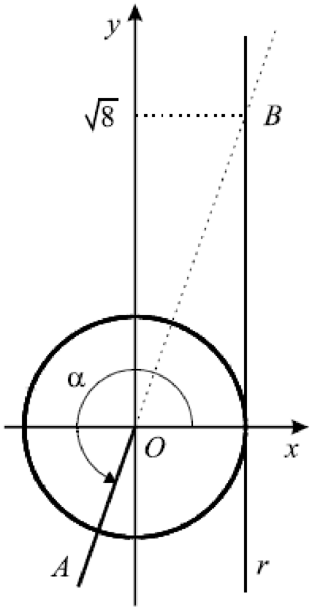
Os pontos P, R e V pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respectivamente.

O quadrilátero [ABCD] é a secção obtida no paralelepípedo pelo plano de equação 2x+3y+z=22, que é perpendicular à reta OT.

O ponto R tem ordenada 6.

a. Justifique que o ponto T tem coordenadas (4,6,2).
b. Determine uma equação do plano que é paralelo ao plano ABC e que contém o ponto Q.
c. Determine as coordenadas do ponto D.

11. Na figura junta estão representados, em referencial o.n. xOy:

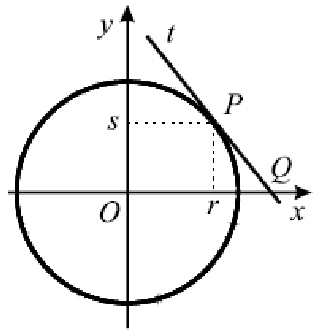


- O círculo trigonométrico
- A reta r, de equação x=1
- O ângulo, de amplitude α, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semi-reta AO
- O ponto B, intersecção do prolongamento da semi-reta AO com a reta r.

Como a figura sugere a ordenada de B é $\sqrt{8}$.

a. Sem recorrer à calculadora, determina o valor de $5\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+2\cos(3\pi-\alpha)$.

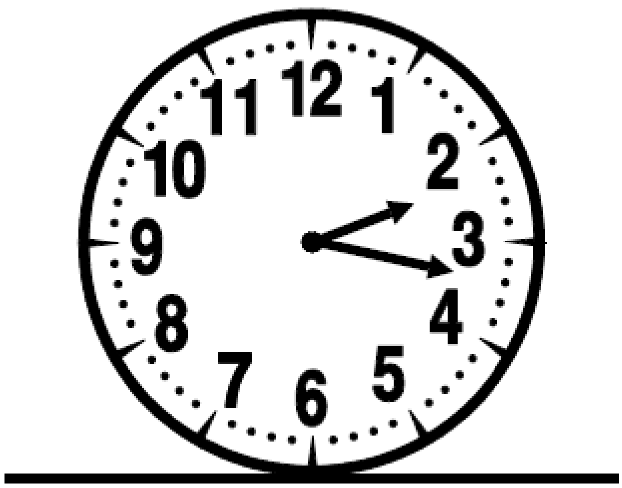
b. Considera agora um ponto P, do 1º quadrante (eixos não incluídos), pertencente à circunferência de centro na origem e raio 1.



Sejam (r,s) as coordenadas do ponto P.
Seja t a reta tangente à circunferência no ponto P.
Seja Q o ponto de intersecção da reta t com o eixo Ox.

Prove que a abcissa do ponto Q é $\frac{1}{r}$.

12. Na figura está representado um relógio de uma estação de caminho de ferro. O mostrador é um círculo e está apoiado numa barra.



Sabe-se que, t segundos após as zero horas,

- A distância (em metros), da extremidade do ponteiro das horas à barra, é dada por

  $h(t) = 1 + \frac{5}{10}\cos\left(\frac{\pi}{21600}t\right)$

- A distância (em metros), da extremidade do ponteiro dos minutos à barra, é dada por

  $m(t) = 1 + \frac{7}{10}\cos\left(\frac{\pi}{1800}t\right)$

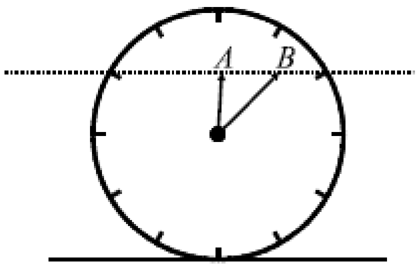
Nota: tanto em h como em m, o argumento da função co-seno está expresso em radianos.

a. Verifique que o ponteiro dos minutos tem mais 20 cm do que o ponteiro das horas.

b. Mostre que 3600 é período da função m e interprete este valor no contexto da situação apresentada.

c. Seja A a extremidade do ponteiro das horas e seja B a extremidade do ponteiro dos minutos.

Tal como a figura junta ilustra, passado pouco tempo das zero horas, a reta AB é paralela à barra na qual o relógio está apoiado.



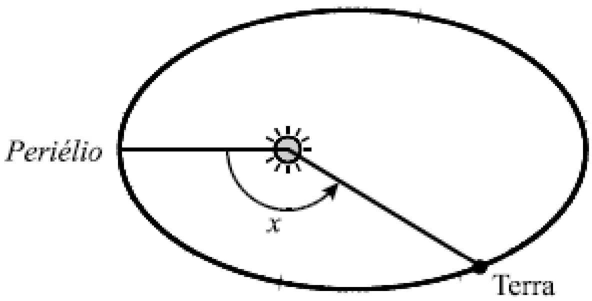
Pouco antes da 1 hora da manhã, há outro instante em que isso acontece. Determine-o, apresentando o resultado em horas, minutos e segundos (segundos arredondados às unidades).

Sugestão: equacione o problema e, recorrendo à calculadora, resolva graficamente a equação obtida.

13. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do sol.

Na figura está assinalado um esquema dessa órbita. Está assinalado o periélio, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol.

Na figura está assinalado um ângulo de amplitude x radianos ($x \in [0, 2\pi[$).



Este ângulo tem o seu vértice no sol, o seu lado origem passa no periélio e o seu lado extremidade passa na Terra.

A distância d, em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x, por

$d = 149{,}6(1 - 0{,}0167\cos x)$

a. Determine a distância máxima e a distância mínima da Terra ao Sol. Apresente os valores pedidos em milhões de quilómetros, arredondados às décimas.

b. Sabe-se que x verifica a relação $\frac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167 \operatorname{sen} x$, em que

- t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo periélio até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x;
- T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa (364,24 dias).

i. Mostre que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$.

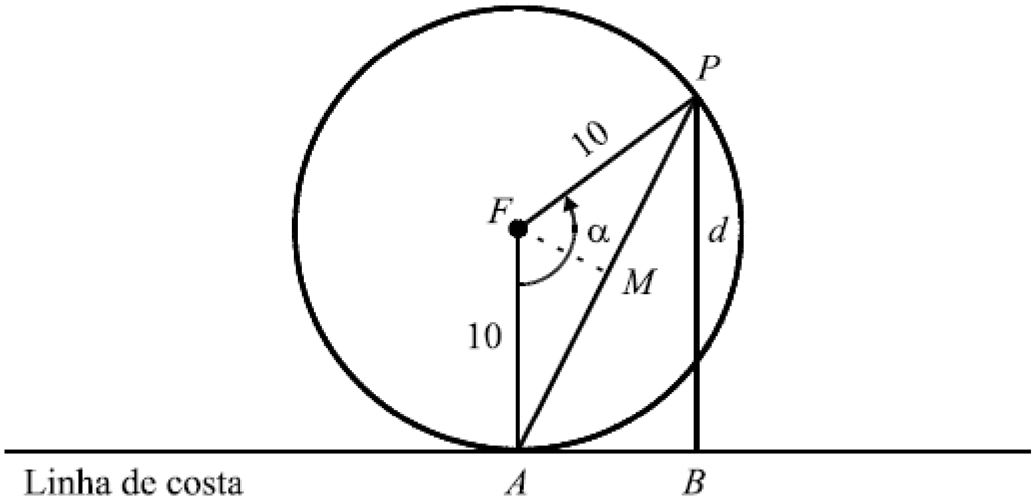
Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

ii. Sabe-se que a última passagem da Terra pelo periélio ocorreu a uma certa hora do dia 4 de Janeiro. Determine a distância a que a Terra se encontrava do Sol, à mesma hora do dia 14 de Fevereiro. Apresente p resultado em milhões de quilómetros, arredondados às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais.

Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora.

14. Um farol (ponto F), situado numa ilha, encontra-se a 10km da costa. Nesta, sobre perpendicular tirada do farol, está um observador (ponto A).

A luz do farol descreve sucessivos círculos e tem um alcance de 10 km. Em cada instante, o farol ilumina segundo uma trajectória rectilínea, com extremidade num ponto P, que percorre a circunferência representada na figura seguinte.



Sejam:

- A a amplitude, em graus, do ângulo orientado cujo lado oigem é a semi-reta FA e cujo lado extremidade é a semi-reta FP;
- M é o ponto médio de [AP];
- $\overline{PB}$ a distância do ponto P à costa.

Mostre que, para 0º < α < 180º:

a. A distância, $\overline{AP}$, expressa em quilómetros, do observador ao ponto P é dada, em função de α, por

$$\overline{AP} = 20\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

b. A distância, d, expressa em quilómetros, do ponto P à costa é dada, em função de α, por

$$d(\alpha) = 20\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- Escreva $F\hat{A}P$, em função de α
- Escreva $P\hat{A}B$, em função de α
- Escreva $\overline{BP}$, em função de α

Soluções:

Escolha Múltipla

1. A	2. B	3. A	4. B	5. D	6. A	7. C	8. A	9. A	10. A
11. B	12. D	13. A	14. A	15. B	16. B	17. A	18. A	19. C	20. D
21. A	22. C								

Resposta aberta

1. 80 hectares de trigo e 80 hectares de milho

3.2.2. $2\sqrt{15}$

4b) $(x,y,z)=(0,5,0)+k.(0,0,1),\ k\in IR$

c) x+2y=10

5c) $(x,y,z)=(0,0,0)+k.(0,3,1),\ k\in IR$

d) reta QV: $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{6}$; M= $\begin{cases} z=3 \\ \frac{x-2}{-2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{6} \end{cases}$;área=4

6b) 3x-y=27 c) 27

7a) 26 b) 77,9º

8b) $(x,y,z)=(10,0,0)+k.(-6,0,1),\ k\in IR$ c) $\frac{25}{3}$

9a) 343 b) H=(-5,0,0) ; pertence ao eixo c) $P=\left(0,0,\frac{13}{2}\right)$

10b) 2x+3y+z=26 c) D=(1,6,2)

11a) -1

12a) m(0) – h(0) = 0,2m = 20 cm

b) Interpretação: Como 3600 segundos é uma hora, pode-se afirmar que, de hora a hora, se repete a distância da extremidade do ponteiro dos minutos à barra.

c) 0h 51m 40s

13a) Máxima: 152,1 milhões de km Mínima: 147,1 milhões de km

bi) Interpretação: O tempo que decorre entre a passagem da Terra pelo periélio e o instante em que a Terra atinge o ponto mais afastado da sua órbita, relativamente ao sol, é metade do tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa.

ii) 147,7 milhões de km (41 dias)