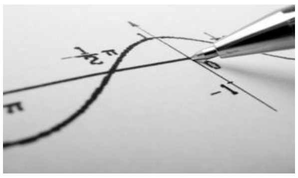
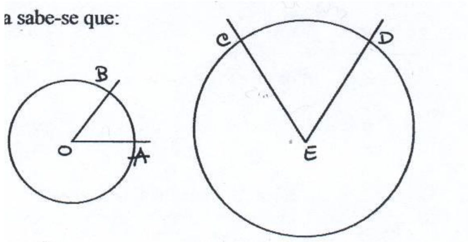
Ficha de Trabalho

- Ficha final de Trigonometria



1. Das circunferências de centros O e E, da figura sabe-se que: $\overline{OA}$ = 1 cm, $\overline{EC}$ = 2 cm , AÔB = 1 rad e CD = 4 cm.
Qual das afirmações é verdadeira:



(A) CÊD = 1 rad (B) CÊD = 2 rad

(C) CÊD = 4 rad (E) CÊD < AÔB

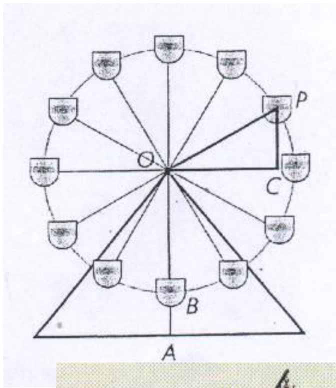
2. Considera num ref. o. m. do plano, os ângulos orientados de lado origem Ox. Qual dos seguintes pares de amplitudes corresponde a ângulos que têm o mesmo lado extremidade:

(A) $\frac{6\pi}{7}$rad e $-\frac{\pi}{7}$rad (B) $\frac{6\pi}{7}$rad e $-\frac{8\pi}{7}$rad (C) $\frac{8\pi}{7}$rad e $\frac{\pi}{7}$rad (D) $\frac{8\pi}{7}$rad e $\frac{15\pi}{7}$rad

3. Numa circunferência de raio 2 cm, um arco com 8 cm de comprimento, tem de amplitude:

(A) $\frac{1}{4}$rad (B) $\frac{\pi}{4}$rad (C) 4 *rad* (D) 4π *rad*

4. Considera a roda gigante representada ao lado. Suponhamos que a roda tem 10 metros de raio, doze cadeiras igualmente espaçadas e a distância mínima ao solo é de 1 metro.

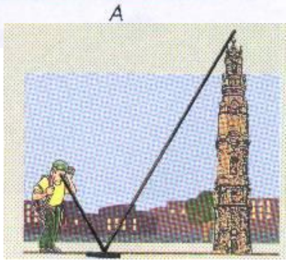


4.1 Determina, com aproximação às décimas, a distância percorrida por cada cadeira numa volta.

4.2 Determina a medida do arco de circunferência entre cada cadeira.

4.3 Determina a distância a que se encontra do solo, uma cadeira que percorra uma distância correspondente a um ângulo de 120º, depois de se encontrar à distância mínima.

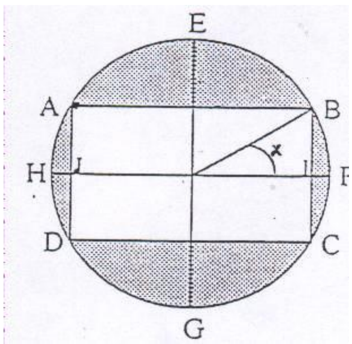
5. Para estimar a altura de uma torre, um estudante recorreu a um espelho, colocando-o de forma a ver a imagem do cimo da torre, conforme a figura. O estudante tem 1,80 m de altura e está a 3 m do espelho e a 20 m da torre. Determina a altura da torre.

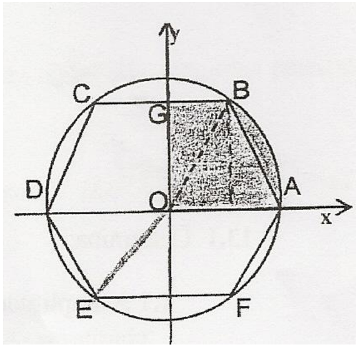


(Nota que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.)

6. A figura representa uma circunferência com 5 cm de raio. Os vértices A, B, C e D do rectângulo pertencem à circunferência. Na figura estão também assinalados dois diâmetros da circunferência, [EG] e [HF], que contêm os pontos médios dos lados do rectângulo e o ângulo BOF, de amplitude x, com $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Mostra que a área tracejada é dada pela expressão $25\pi - 100$ sen x.cos x





7. No ref.o.m. da figura, está representado o hexágono regular [ABCDEF], com 2cm de lado, inscrito numa circunferência.

7.1 Determina um valor aproximado, às centésimas, do comprimento do arco menor AC.

7.2 Indica as coordenadas exactas do ponto B.

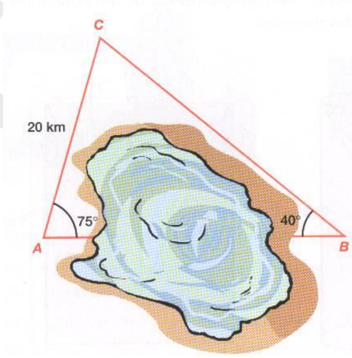
7.3 Mostra que o valor exacto da área da região sombreada da figura é $\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{6}\text{cm}^2$

Nota: a região sombreada é limitada pelo arco de circunferência AB e pelos segmentos de recta [AO], [OG] e [GB].

7.4 Considera que o ponto B se move ao longo da circunferência e, em consequência, o ponto G desloca-se ao longo de Oy de tal forma que se tem sempre $[GB]//[OA]$. α designa a amplitude, *em radianos,* do ângulo AOB com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

Mostra que a área do trapézio rectângulo, $[OABG]$, é dada em função de α , por $A(\alpha) = 2\text{sen}\,\alpha(1+2\cos\alpha)$

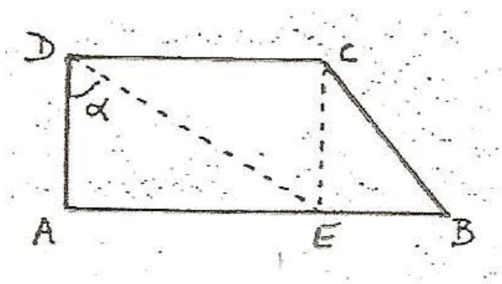
8. Duas patrulhas militares partem do posto de comando C em direcção aos pontos A e B que estão separados por um lago como ilustra a figura. Sabe-se que: $\overline{CA}$ = 20Km, CÂB = 75º e o ângulo ABC tem 40º de amplitude.



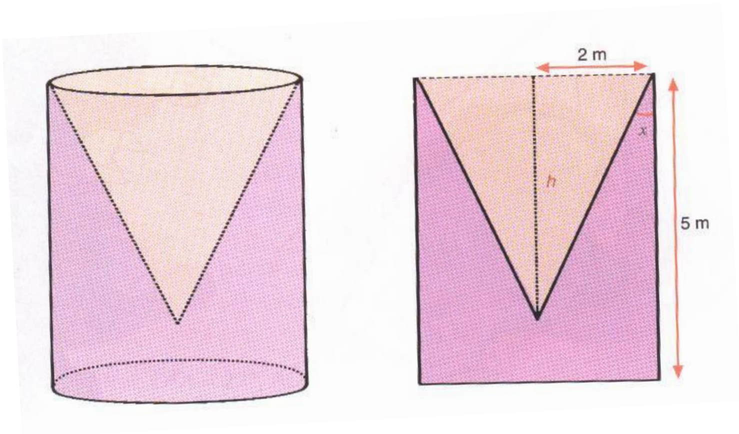
Ambas as patrulhas possuem *walkie-talkies* que permitem estabelecer comunicação entre si a uma distância 27 km.

Averigua se as duas patrulhas podem estabelecer comunicação a partir dos pontos A e B.

9. Considera a figura que representa o trapézio rectângulo [ABCD]. Sabe-se que $\overline{DC} = 12$, $A\hat{B}C = \beta$, $\text{tg}\alpha = 1{,}5$. Determina o valor da amplitude β para que a área do trapézio seja 128cm^2.



10. .Uma fábrica produz depósitos para armazenar combustível, a partir de cilindros, com 5 metros de altura e base com 2 m de raio, extraindo cones. As alturas dos cones são variáveis e representadas por **h**. A figura representa um desses recipientes e a secção que resulta de um corte feito por um plano perpendicular às bases que passa pelo centro das mesmas.



10.1 Determina:

1.1 A amplitude do ângulo *x*, se a altura do cone for de 3 metros.

1.2 O comprimento da geratriz do cone no caso do ângulo *x* medir 38º.

10.2 Mostra que a capacidade de armazenamento do recipiente é dada , em função de *x*, pela expressão

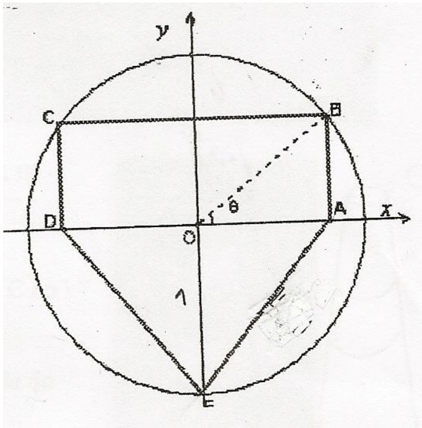
$V(x) = \dfrac{8\pi}{3\text{tg}x}$

10.3 Um cliente faz um pedido de construção de um depósito com capacidade de armazenamento de 25 mil litros de combustível.

A resposta dada pelo sector de produção foi: " *É impossível satisfazer o pedido. A capacidade máxima dos nossos recipientes é de 20 943 litros."*

Num pequeno texto comenta a resposta dada pelo sector de produção e relaciona variação do ângulo de amplitude x com a variação da capacidade do depósito. **Com recurso à calculadora** estuda graficamente este problema e ilustra o texto com o(s) gráfico(s) que considerares necessários e as respectivas janelas de visualização.

11. Na figura está representado o círculo trigonométrico e um polígono $[ABCDE]$. O lado $[BC]$ é paralelo ao eixo Ox e os lados $[BA]$ e $[CD]$ são paralelos ao eixo Oy. Seja θ a amplitude, em radianos, do ângulo AOB e $\theta \in \left]0\text{rad}; \dfrac{\pi}{2}\text{rad}\right[$:



11.1 Mostra que:

a) $\overline{EA} = \sqrt{1+\cos^2\theta}$

b) O perímetro do rectângulo $[ABCD]$ é dado em função de θ pela expressão $P(\theta) = 4\cos\theta + 2\text{sen}\theta$

c) A área do polígono $[ABCDE]$ é dada pela expressão $A(\theta) = \cos\theta(2\text{sen}\theta + 1)$

11.2 Determina o valor exacto da área do polígono $[ABCDE]$ no caso de se ter $\overline{EA} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

12. Calcula o valor exacto das seguintes expressões:

12.1. $\text{sen}\left(-\dfrac{7}{6}\pi\text{rad}\right) - \text{sen}\left(\dfrac{17}{6}\pi\text{rad}\right) + \cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\text{rad}\right) + \text{tg}\left(\dfrac{11}{4}\pi\text{rad}\right)$

12.2. $\cos^2\left(\dfrac{3}{2}\pi\text{rad}\right) + \text{sen}\left(\dfrac{11}{6}\pi\text{rad}\right) + \text{sen}^2\left(-\dfrac{2}{3}\pi\text{rad}\right)$

13. Simplifica as expressões seguintes em que α representa a amplitude de ângulo:

13.1. $\text{sen}\left(\dfrac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) + \text{tg}(\alpha - 5\pi) - \text{sen}(-\alpha)$

13.2. $\cos\left(\dfrac{5}{2}\pi + \alpha\right) + \cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) - \cos(-4\pi - \alpha)$.

Determina o valor exacto desta expressão sabendo que $\text{tg}\left(-\dfrac{7}{2}\pi - \alpha\right) = \dfrac{3}{4}$ e $\alpha \in 2º$ Q.

14. Num certo ano, na cidade de Coimbra, a duração S do dia, isto é, o tempo que decorreu entre o nascer e o pôr-do-sol, foi dado pela seguinte função:

$S(d) = 12{,}21 + 2{,}72\cos\left(\dfrac{345-2d}{365}\pi\right)$ com S *em horas* e em que d é a ordem do dia no ano.

Por exemplo: <u>para o dia 19 de Março, o valor de d é 31+28+19=78.</u>

Nas questões seguintes, apresenta os resultados com aproximação ao minuto.

14.1 Quanto tempo durou o dia 1 de Abril?

14.2 Se nesse dia o sol nasceu às 6h 32 min, a que horas se deu o pôr- do- sol?

14.3 Qual foi o maior dia do ano? Quanto durou ele?

14.4 A função S(d) é periódica. Qual é o seu período? Justifica a tua resposta.

14.5 Recorrendo às **capacidades gráficas da calculadora** determina:

a) o dia mais pequeno do ano e a sua duração.

b) o número de dias do ano que tiveram uma duração superior a 14 horas.

Numa pequena composição explica como procedeste para obteres as tuas respostas e ilustra-a com o(s) gráfico(s) que entenderes necessários e as respectivas janelas de visualização.

15. Determina, se possível, os valores de $k \in IR$ que tornam possível cada uma das seguintes condições em x, sendo x amplitude de ângulos:

15.1. $\operatorname{sen} x = -k^2 + 2k \wedge x \in \left]0 \text{ rad}; \pi \text{ rad}\right[$

15.2. $(k+2)\operatorname{tg} x = 1 \wedge \cos x = -2 - k$

16. Resolve, em IR, as seguintes condições em x:

16.1. $4 + \sqrt{2}\operatorname{sen} x = 3$

16.2. $\cos x = \operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi\right)$

16.3. $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$

16.4. $\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$

16.5. $2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

16.6. $3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x = 1 \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

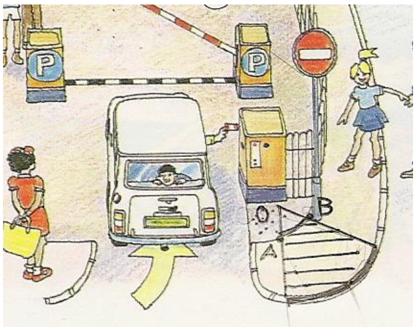
17. No conjunto das amplitudes de ângulo determina as soluções das condições:

17.1. $2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right) + 1 = 0 \wedge x \in \left]-3\pi \text{ rad}; -\pi \text{ rad}\right[$

17.2. $2\operatorname{sen} x . \cos x - \cos x = 0 \wedge x \in \left[0 \text{ rad}; \frac{3}{2}\pi \text{ rad}\right[$

17.3. $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(5\pi - \frac{x}{2}\right) + 1 = 0 \wedge x \in \left]-\pi \text{ rad}; \pi \text{ rad}\right[$

18. O passeio de uma rua tem 2 metros de largura e descreve uma curva em que $\overline{OA} = 1{,}4\text{ m}$ e $A\hat{O}B = 45^{o}$. Qual é a área da porção de curva do passeio? Apresenta o resultado arredondado às unidades.



19. Prova que, no seu domínio, são universais as condições seguintes:

19.1. $\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x = \frac{\cos x}{\operatorname{tg} x}$

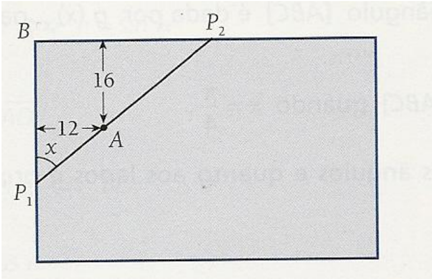
19.2. $\frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - 1}{\cos x} = 2\operatorname{sen} x$

19.3. $1+\cos\theta=\dfrac{\text{sen}^2\theta}{1-\cos\theta}$

19.4. $\dfrac{\cos^4\theta-\text{sen}^4\theta}{\cos^2\theta}=1-\text{tg}^2\theta$

20. Considera a recta $s: x+2y+5=0$. Sendo θ a inclinação desta recta, calcula o valor exacto da expressão $E=\text{sen}\,\theta+\cos\theta$

21. Na figura está representado um lago artificial de forma rectangular. Pretende-se construir um pontão, ligando duas margens do lago, entre os pontos P_1 e P_2 tal como a figura ilustra. O pontão tem um pilar de apoio A, situado a $12\,\text{m}$ de uma das margens e a $16\,m$ da outra. Seja x a amplitude do ângulo P_2P_1B.



21.1. Mostra que o comprimento do pontão, em metros, é dado por $c(x)=\dfrac{16\,\text{sen}\,x+12\cos x}{\text{sen}\,x.\cos x}$

21.2. Considerando que a localização de P_1 e de P_2 pode variar, determina o comprimento do pontão para a qual se tem $\overline{BP_1}=\overline{BP_2}$. Apresenta o resultado em metros, arredondando às décimas.

21.3. Admite que num dia de Verão a temperatura da água do lago, em graus Celsius, pode ser dada, aproximadamente, por

$$f(t)=17+4\cos\left[\frac{\pi(t+7)}{12}\right]$$

onde t designa o tempo, em horas, decorrido desde as zero horas desse dia. Numa pequena composição indica como varia a temperatura da água do lago ao longo do dia.

Utiliza a calculadora gráfica e não deixes de referir os seguintes aspectos:

- *quando é que a temperatura aumenta e quando é que diminui;*
- *a que horas é que a temperatura é mínima e qual é o valor desse mínimo;*
- *a que horas é que a temperatura é máxima e qual é o valor desse máximo;*
- *as melhores horas para se tomar banho, admitindo que um banho só é realmente bom se a temperatura da água não for inferior a 19 graus.*

Enriquece a composição com o traçado de um ou mais gráfico

Soluções: **1**. B **2**. B **3**. C **4.1** 62,8 m **4.2** 5,24 m **4.3** 16 m **5**. 10,2 **7.1** 4,19. **7.2** $(1,\sqrt{3})$

8 não **9.** 45º **10.1** 33,69º **10.2** 3,25 m **11.2** $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ **12.1** $-\frac{3}{2}$ **12.2** $\frac{1}{4}$ **13.1** $\text{tg}\alpha-\cos\alpha$

13.2 $-\cos\alpha=\frac{3}{5}$ **14.1** 13h 06 min **14.2** 19h 38 min **14.3** 21 de Junho e dura 15h 33min **14.4** 365

14.5 a) 21 de Dezembro **14.5 b)** 99 dias **15.1** $k\in\left]0,2\right[$ **15.2** impossível

16.1 $x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \vee x=\frac{5}{4}\pi+k2\pi, k\in Z$ **16.2** $x=\pi+k2\pi, k\in Z$ **16.3** $x=\frac{3}{4}\pi+k\pi, k\in Z$

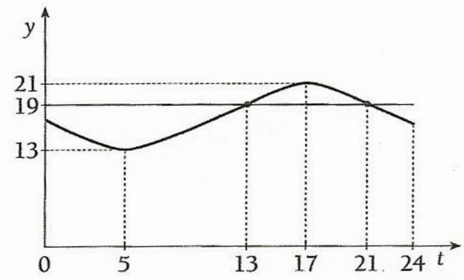
16.4 $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in Z$ **16.5** $x=\frac{7}{6}\pi+k2\pi \vee x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in Z$

16.6 $x=\frac{3}{4}\pi+k\pi \vee x=0{,}32\,\text{rad}+k\pi, k\in Z$ **17.1** $x=-\frac{13}{6}\pi \vee x=-\frac{17}{6}\pi$

17.2 $x=\frac{7}{2}\pi \vee =\frac{\pi}{6} \vee x=\frac{5}{6}\pi$ **17.3** $x=\frac{\pi}{3}$ **18** 3,8 m^2 **20.** $E=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

21.2 $\overline{P_1P_2}=39{,}6\,m$

21.3 Com o apoio da calculadora obteve-se o gráfico da função f, onde se assinalam os minimizantes, os maximizantes, bem como as abcissas dos pontos de intersecção com a recta $y=19$.



Da análise do gráfico e dos valores obtidos podemos concluir que a temperatura da água diminui entre as 0 e as 5 horas, hora a que atinge o valor mínimo de 13 graus. A partir das 5 horas a temperatura da água vai aumentando atingindo o valor máximo de 21 graus às 17 horas. De seguida, a temperatura volta a descer até ao fim do dia.

Verifica-se, ainda, que a temperatura é superior a 19 graus entre as 13 e as 21 horas, sendo, portanto, neste intervalo de tempo que se deve escolher a hora para tomar banho.