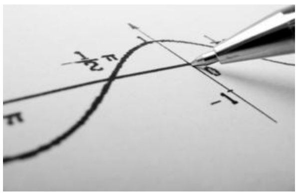
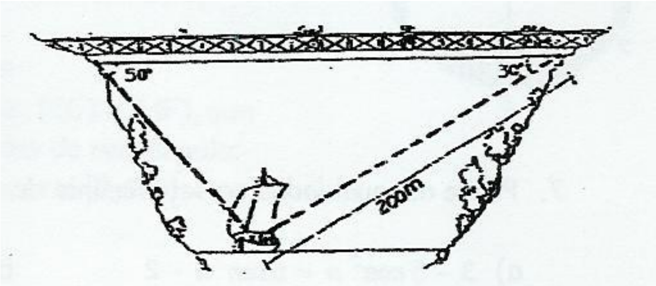
Ficha de Trabalho

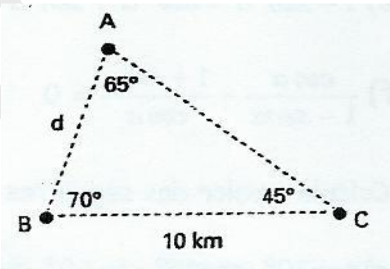


- Razões trigonométricas num triângulo rectângulo.
- Razões trigonométricas de 30º, 45º e 60º.

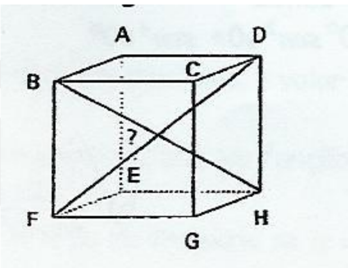
1) Com base na figura, determine o comprimento da ponte.



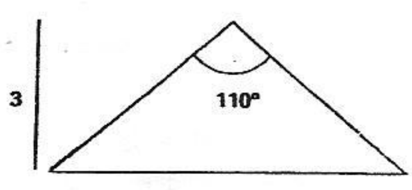
2) Duas aldeias, A e B, estão situadas nas margens de um lago.
Para determinar a distância entre elas, tomou-se um edifício C que dista 10 km da aldeia B e mediram-se os ângulos internos do triângulo [ABC].
Determine a distância entre as duas aldeias.



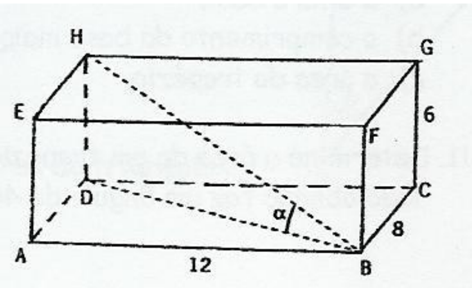
3) Qual a medida do ângulo de duas diagonais espaciais de um cubo?



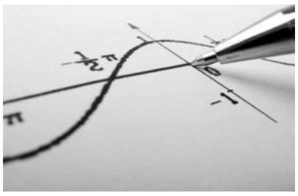
4) Um candeeiro produz um cone de luz em que o ângulo de corte mede 110º. Se o candeeiro for colocado na vertical provoca no chão uma área iluminada em forma de círculo. Qual a área iluminada no chão se o candeeiro estiver a 3 metros de altura?
Que redução sofre a área iluminada se o candeeiro estiver a 1 metro de altura?



5) Na figura ao lado [ABCDEFGH] é um prisma recto.
Determine a amplitude do ângulo HBD.

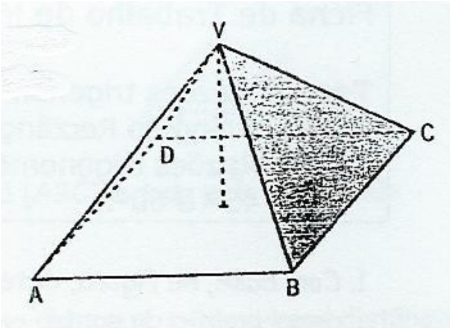


Ficha de Trabalho



- Razões trigonométricas num triângulo rectângulo.
- Razões trigonométricas de 30º, 45º e 60º.

6) Na figura [ABCDV] é uma pirâmide quadrangular regular em que a base é um quadrado com 10 m de lado. Sabendo que a altura da pirâmide é 5 m, determine $V\hat{A}C$ e $B\hat{V}C$.



7) Prove as seguintes igualdades:

7.1) $3-5\cos^2\alpha = 5\,\text{sen}^2\alpha - 2$

7.2) $\text{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha = \text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha$

7.3) $\dfrac{\cos^2\alpha}{\text{sen}\alpha} + \text{sen}\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\alpha}$

7.4) $\dfrac{2\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha + 1}{\cos\alpha} = 3\cos\alpha$

7.5) $1-\text{sen}^4\alpha = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha.\cos^2\alpha$

7.6) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\text{sen}\alpha} - \dfrac{1+\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 0$

8) Calcule o valor das seguintes expressões:

8.1) $\text{sen}\,30º.\cos 45º + \text{tg}\,60º + \text{tg}\,45º - 2\,\text{tg}\,30º$

8.2) $\text{sen}30º + 2\cos^2 45º - \text{sen}60º$

8.3) $\text{sen}^4 30º + 2\,\text{sen}^2 30º.\,\text{sen}^2 60º + \text{sen}^4 60º$

9) Verifique se:

9.1) $1+\text{tg}^2 30º = \dfrac{4}{3}$

9.2) $\dfrac{1}{\text{sen}45º} = 1 + \dfrac{1}{\text{tg}45º}$

9.3) $\text{sen}30º = \sqrt{\dfrac{1-\cos 60º}{2}}$

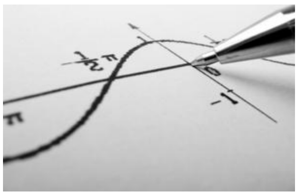
9.4) $2\,\text{sen}30º = \text{sen}\,60º.\cos 60º + \cos 60º.\,\text{sen}60º$

10) A pedido de um dos clientes, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima com a forma de um trapézio em que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2\,\text{dm}$
Exprima em função de θ:

10.1) A altura h.
10.2) O comprimento da base maior.
10.3) A área do trapézio.

11) Determine a área de um trapézio isósceles em que a base menor mede 1 metro e o

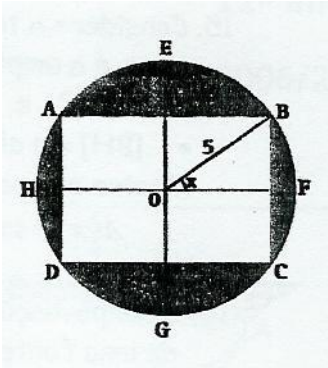
Ficha de Trabalho



- Razões trigonométricas num triângulo rectângulo.
- Razões trigonométricas de 30º, 45º e 60º.

lado oblíquo faz um ângulo de 40º com a base maior e tem 0,5 metros de comprimento.

12) A figura representa um canteiro de forma circular com 5 m de raio.
O canteiro tem uma forma rectangular, que se destina à plantação de flores, e uma zona relvada, assinalada a sombreado na figura.
Os vértices A, B, C e D do rectângulo pertencem à circunferência que limita o canteiro.
Na figura estão também assinalados:



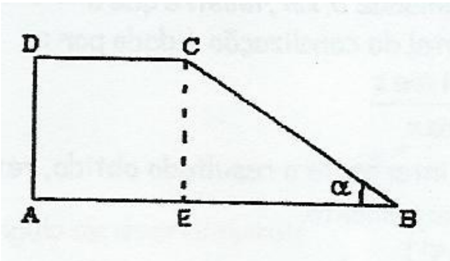
- Dois diâmetros da circunferência, [EG] e [HF], que contêm os pontos médios dos lados do rectângulo.
- O ângulo BOF, de amplitude x e $x \in \left]0º, 90º\right[$.
- O centro O da circunferência.

12.1) Mostre que a área, em m^2, da zona relvada é dada, em função de x, por:

$$A(x) = 25\pi - 100 \operatorname{sen} x . \cos x$$

12.2) Calcule $A(45º)$.

13) A figura representa um trapézio rectângulo.
Sabe-se que:



- $\overline{CD} = 4\ m$
- $\overline{BC} = 5\ m$
- $A\hat{B}C = \alpha$
- $0 \langle \alpha \langle 90º$

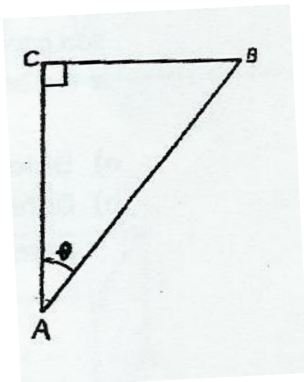
13.1) Calcule em graus, com três casas decimais, o valor de α se [AECD] for um quadrado.

13.2) Mostre que a área do trapézio é dada em função de α, pela expressão:

$$A(\alpha) = sen\,\alpha . (20 + 12{,}5 . \cos\alpha)$$

13.3) Calcule o valor exacto da área do trapézio se $\alpha = 60º$.

14) A figura representa um triângulo [ABC] rectângulo em C.
Sabe-se que:



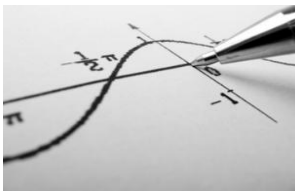
- $\overline{CA} = 3\,cm$
- $\hat{A} = \theta$

14.1) Prove que a área do triângulo é dada em função de θ, pela expressão:

$$A(\theta) = \frac{9}{2}\,tg\,\theta$$

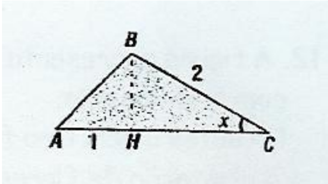
14.2) Se $\theta = 60º$, qual é o valor exacto da área do triângulo?

Ficha de Trabalho



- Razões trigonométricas num triângulo rectângulo.
- Razões trigonométricas de 30º, 45º e 60º.

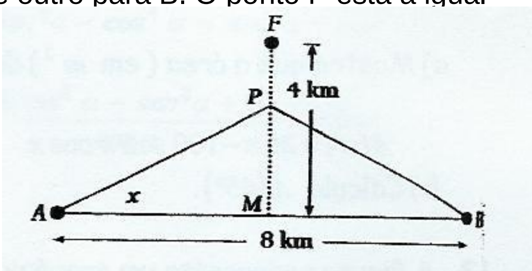
15) Considere o triângulo [ABC] representado na figura.
Sabendo que:



- x é a amplitude do ângulo BCA.
- $\overline{BC}=2 \quad e \quad \overline{AH}=1$.
- [BH] é a altura relativa ao vértice B.

Mostre que para qualquer $x \in \left]0,90^{\circ}\right[$ a área do Δ[ABC] é dada pela expressão $A(x)=sen\,x.(1+2.\cos x)$.

16) Duas povoações, A e B, distanciadas em 8 km uma da outra, estão a igual distância de uma fonte de abastecimento de água, localizada em F.
Pretende-se construir uma canalização ligando a fonte às duas povoações, como se indica na figura. A canalização é formada por três canos: um que vai da fonte F até ao ponto P e dois que partem de P, um para A e outro para B. O ponto P está a igual distância de A e de B.
Tem-se ainda que:



- O ponto M, ponto médio de [AB], dista 4 km de F.
- x é a amplitude do ângulo PAM e $x \in [0, 45^{\circ}]$.

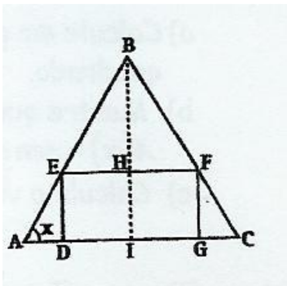
16.1) Tomando para unidade o km, mostre que o comprimento total da canalização é dado por:

$$\mathrm{C}(x)=4+\frac{8-4\,\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$$

16.2) Calcule $C(0)$ e interprete o resultado obtido, referindo a forma da canalização e consequentemente o seu comprimento.

16.3) Determine $\mathrm{C}(45^{\circ})$.

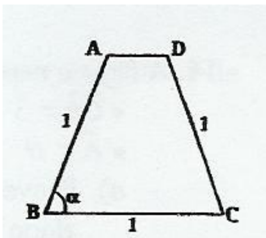
17) Na figura o triângulo [ABC] é isósceles, $\overline{AB}=\overline{BC}$,
[DEFG] é um rectângulo; $\overline{DG}=2$; $\overline{DE}=1$;
x designa a amplitude do ângulo BAC e $x \in \left]0, 90^{\circ}\right[$.



17.1) Determine a área do Δ[ABC] em função de x.

17.2) Calcule o valor da área quando $x=60^{\circ}$.

18) Seja [ABCD] um trapézio isósceles; os lados [AD] e [BC] são paralelos; $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=1$; $\overline{AD}\leq 1$;
α é a amplitude do ângulo ABC e $\alpha \in \left]60^{\circ}, 90^{\circ}\right[$.

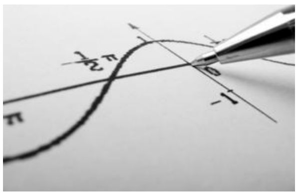


18.1) Determine a área do trapézio [ABCD] em função de α.

18.2) Determine o valor da área para $\alpha=90^{\circ}$ e interprete geometricamente o resultado obtido, caracterizando o quadrilátero que se obtém.

<u>Soluções da Ficha de Trabalho nº 2</u>:

Ficha de Trabalho



- Razões trigonométricas num triângulo rectângulo.
- Razões trigonométricas de 30º, 45º e 60º.

1) 257,12 m

2) 7,8 km

3) 70,53º

4) 57,55 m^2 ; sofre uma redução de 8,98.

5) 22,59º

6) $V\hat{A}C$ = 35,27º ; $B\hat{V}C$ = 70,54º.

8.1) $\frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+12}{12}$

8.2) $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

8.3) 1

9) Verificam-se as igualdades 9.1) e 9.3). Não se verificam as igualdades 9.2) e 9.4).

10.1) $\text{h}=\text{sen}\,\theta$

10.2) Base maior = $4\cos\theta+2$

10.3) $\text{A}_{\text{trapézio}}=\text{sen}\,\theta.\left(4\cos\theta+4\right)$

11) $\text{A}_{\text{trapézio}}=0{,}44\ \text{m}^2$

12.2) $\text{A}\left(45º\right)=25.\left(\pi-2\right)$

13.1) 53,13º

13.3) $\frac{100\sqrt{3}}{8}$

14.2) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

16.2) $C(0)=12$. A canalização tem a forma de um T invertido de comprimento total 12 km.

16.3) $C(45º)=8\sqrt{2}$

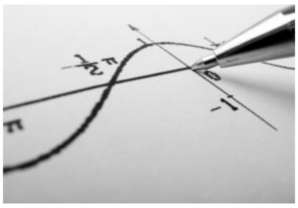
17.1) $\text{A}(\text{x})=2+\text{tg}\,\text{x}+\frac{1}{\text{tg}\,\text{x}}$

17.2) $2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$

18.1) $A(\alpha)=sen\alpha-\cos\alpha\,.\,sen\alpha$

18.2) $A(90º)=1$. O quadrilátero que se obtém é um quadrado de lado 1.

Ficha de Trabalho



- Razões trigonométricas de 30º, 45º e 60º
- Radiano
- Redução ao 1º quadrante

1) Indique o(s) quadrante(s) em que:

1.1) O seno é negativo e a tangente é positiva.

1.2) O seno cresce e o co-seno decresce.

1.3) O seno e a tangente crescem e são negativos.

1.4) O seno é positivo, o co-seno decresce e a tangente é positiva.

2) Calcule o valor exacto das seguintes expressões:

2.1) $sen\frac{\pi}{4} - tg^2\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4} \,.\, sen\frac{\pi}{4}$

2.2) $tg\,\pi + \cos 0 - sen\frac{\pi}{2} \,.\, tg\frac{\pi}{4} + 2$

2.3) $\dfrac{sen^2\frac{\pi}{3}}{\cos^2\frac{\pi}{3}} + 1$

3) Determine o valor exacto das seguintes expressões:

3.1) $sen\,225^{\circ} + \cos 330^{\circ}$

3.2) $2\,sen\,690^{\circ} - tg\,225^{\circ} + tg\left(-120^{\circ}\right) + \cos 630^{\circ}$

3.3) $tg\,150^{\circ} + tg\left(-240^{\circ}\right) + tg\left(-315^{\circ}\right)$

4) Determine:

4.1) $\sqrt{3}\,sen\,x - \sqrt{2} \,.\, \frac{1}{tg\,x}$, sabendo que: $tg\,x = -\sqrt{2} \;\; e \;\; x \in 2^{\circ}Q$

4.2) $2\,sen\,x + 3\,tg\,x$, sabendo que $\cos x = -\frac{3}{5} \;\; e \;\; x \in \left]\pi, 2\pi\right[$.

5) Determine os valores de k que satisfazem simultaneamente cada uma condições:

5.1) $sen\,\alpha = \frac{2k-1}{3} \;\; e \;\; \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

5.2) $sen\,\alpha = \frac{k+1}{2} \;\; e \;\; \cos\alpha = \frac{k-1}{2}$

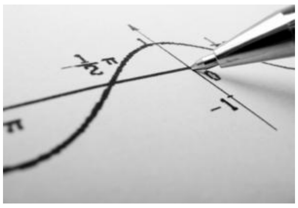
5.3) $3\,sen\,\alpha = m^2 - 1$

5.4) $tg\,\alpha = 3 \wedge \cos\alpha = m - 1$

5.5) $sen\,\alpha = m^2 + 2 \wedge \alpha \in 1^{\circ}Quadrante$

5.6) $sen\,\alpha = m^2 + 1 \wedge \alpha \in 3^{\circ}Quadrante$

Ficha de Trabalho



- Razões trigonométricas de 30º, 45º e 60º
- Radiano
- Redução ao 1º quadrante

6) Simplifique as seguintes expressões:

6.1) $tg\left(2\pi-\alpha\right)+\frac{1}{2}\cos\left(3\pi+\alpha\right)-tg\left(-\alpha\right)+\frac{3}{2}sen\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

6.2) $2\,sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\left(sen\alpha+\cos\alpha\right)^2$

6.3) $sen\left(\alpha-\pi\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-tg\left(-\alpha\right)$

6.4) $\cos\left(x-\pi\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right).sen\left(x-\pi\right)+sen\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

7) Simplifique as expressões:

7.1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+sen\left(\pi+x\right)$

7.2) $sen\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\pi-x\right)+sen\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)+sen\left(-x-\frac{11\pi}{2}\right)$

7.3) $3.\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-sen\left(\pi+x\right)-\cos\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)$

7.4) $sen\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(7\pi+x\right)-tg\left(\frac{13\pi}{4}\right)-sen\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

8) Exprima a expressão $A\left(x\right)$ em função de $sen\,x$ e de $\cos x$

8.1) $A(x)=sen\left(-x\right)-sen\left(\pi-x\right)$

8.2) $A(x)=\cos\left(-x\right)+\cos\left(\pi+x\right)$

8.3) $A(x)=sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)$

8.4) $A(x)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+sen\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)$

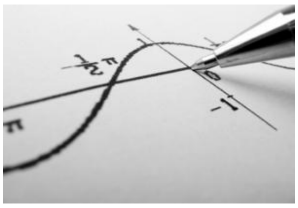
9) Calcule o valor exacto de cada uma das seguintes expressões:

9.1) $sen\frac{13\pi}{3}+\cos 5\pi-tg\left(-7\pi\right)+\cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right)$

9.2) $sen^2\left(-\frac{7}{4}\pi\right)+\cos^2\left(-\frac{7}{4}\pi\right)$

9.3) $sen\left(\frac{19\pi}{3}\right)+\cos\left(-3\pi\right)-tg\left(\frac{13\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

Ficha de Trabalho



- Razões trigonométricas de 30º, 45º e 60º
- Radiano
- Redução ao 1º quadrante

9.4) $tg\left(\frac{13\pi}{4}\right)+\cos(6\pi)-sen\left(-\frac{7\pi}{2}\right)+\cos\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$

10) Sabendo que $\cos\alpha=-\frac{5}{12}$ e que $\alpha\in 3^{o}\,quadrante$, calcule:

10.1) $tg\,\alpha$

10.2) $2\,sen(\pi-\alpha)+sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

11) Sabendo que $sen(2\pi-\alpha)=\frac{4}{5}$ e $\pi\langle\,\alpha\,\langle\frac{3}{2}\pi$, calcule $tg(5\pi+\alpha)+sen\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$

12) Sabendo que $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}$ e $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, calcule o valor exacto de :

$\cos(-x)-sen(\pi+x)+tg(-x)$

13) Sabendo que $\cos(\pi+x)=-\frac{3}{5}$ e $x\in 4^{o}\,quadrante$, calcule o valor de:

13.1) $sen(\pi+x)$

13.2) $1-tg(\pi-x)$

14) Sabendo que $sen(\pi+x)=-\frac{3}{7}$ e $x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, calcule o valor exacto de :

$tg(\pi-x)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

15) Considere a expressão $A(x)=\cos(-\pi+x)+tg(-3\pi+x)-2\,sen(\pi-x)$

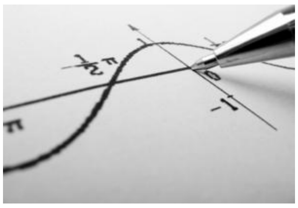
15.1) Simplifique a expressão $A(x)$

15.2) Sabendo que $sen\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{3}{5}\wedge\alpha\in[\pi,2\pi]$, calcule $A(\alpha)$.

16) Sabendo que $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-sen(\pi+\beta)=-1\wedge\beta\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$.

Calcule o valor da expressão $\frac{\cos(3\pi+\beta)+2}{1-tg(5\pi-\beta)}$.

Ficha de Trabalho



- Razões trigonométricas de 30º, 45º e 60º
- Radiano
- Redução ao 1º quadrante

17) Simplifique a expressão $B(x)=\dfrac{sen\left(\dfrac{13}{2}\pi - x\right) - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right).\cos\left(7\pi + x\right)}{tg\left(2x\right)}$

18) Indique, justificando o valor lógico das seguintes proposições:

18.1) $\exists\, x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[\;:\; tg\, x \rangle 0$

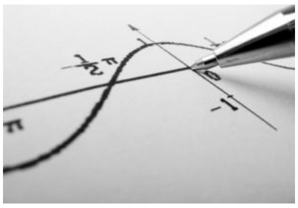
18.2) $\forall\, \alpha\,,\ sen\left(\beta - \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\beta$

18.3) Em $\left]-\dfrac{3\pi}{2}, -\pi\right[$, a função seno é decrescente.

18.4) $\exists\, x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[\;: sen\, x\, .\cos x \rangle\, 0$

18.5) $\left(\dfrac{1}{tg^2 x} + 1\right).tg\, x = \dfrac{1}{sen\, x.\cos x}$

Ficha de Trabalho



- Razões trigonométricas de 30º, 45º e 60º
- Radiano
- Redução ao 1º quadrante

SOLUÇÕES:

1.1) 3º Q   1.2) 1º Q   1.3) 4º Q   1.4) 1º Q

2.1) $\frac{\sqrt{2}-5}{2}$ 2.2) 2   2.3) 4

3.1) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ 3.2) $-2+\sqrt{3}$ 3.3) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}+1$

4.1) $\sqrt{2}+1$ 4.2) $\frac{12}{5}$

5.1) $k\in\left]\frac{1}{2},2\right[$ 5.2) $k\in\{-1,1\}$ 5.3) $m\in[-2,2]$ 5.4) $m=1\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$

5.5) Não existe   5.6) Não existe

6.1) $-2\cos\alpha$ 6.2) -1 6.3) $-2\,sen\,\alpha+tg\,\alpha$ 6.4) $-2\cos\alpha-sen^2\alpha$

7.1) $-2\,sen\,x$ 7.2) 0 7.3) $5\,sen\,x$ 7.4) 0

8.1) $-2\,sen\,x$ 8.2) 0 8.3) $\cos x-sen\,x$ 8.4) $sen\,x-\cos x$

9.1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{2}$ 9.2) 1 9.3) $\sqrt{3}-2$ 9.4) $\frac{3}{2}$

10.1) $\frac{\sqrt{119}}{5}$ 10.2) $\frac{-2\sqrt{119}-5}{12}$

11) $\frac{29}{15}$

12) $\frac{5\sqrt{2}+4}{12}$

13.1) $\frac{4}{5}$ 13.2) $-\frac{1}{3}$

14) $\frac{21\sqrt{10}+60}{140}$

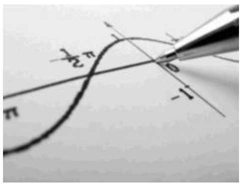
15.1) $-\cos x+tg\,x-2\,sen\,x$ 15.2) $\frac{53}{15}$

16) $\frac{4\sqrt{2}+40}{21}$

17) $\frac{\cos x+2\,sen\,x.\cos x}{tg(2x)}$

18.1) F   18.2) F   18.3) V   18.4) F   18.5) V

Ficha de Trabalho



- Redução ao 1º quadrante
- Equações trigonométricas

1. Sem utilizar a calculadora, determine o valor de cada uma das expressões:

1.1) $2\,\text{sen}\,180^\circ - 3\,\text{sen}\,270^\circ$

1.2) $\dfrac{\text{sen}\,90^\circ - \text{sen}(-90^\circ)}{2 + \text{sen}\,720^\circ}$

1.3) $\dfrac{\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\text{sen}(2\pi) - 5\,\text{sen}\left(-\frac{3}{2}\pi\right)}$

1.4) $\text{sen}\,810^\circ - \text{sen}(-630^\circ) + 10\,\text{sen}\,1080^\circ$

1.5) $\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \text{tg}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

1.6) $\text{sen}\left(\frac{17}{6}\pi\right) + \cos\left(\frac{19}{4}\pi\right) - \text{tg}\left(\frac{17}{6}\pi\right)$

1.7) $\text{tg}\left(\frac{5\pi}{3}\right) \times \cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right) + \text{sen}\left(\frac{15}{6}\pi\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

1.8) $\dfrac{\text{sen}\left(-\frac{11}{6}\pi\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) \times \dfrac{1}{\text{tg}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}}{\cos\left(-\frac{11}{3}\pi\right) + \text{tg}\left(\frac{5}{4}\pi\right) \times \text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

1.9) $3\cos 90^\circ + 2\cos(-180^\circ) + \frac{1}{2}\cos 270^\circ$

1.10) $\dfrac{\cos(-1440^\circ) - 3\cos 720^\circ}{\cos(-270^\circ) + 2\cos 450^\circ - 3}$

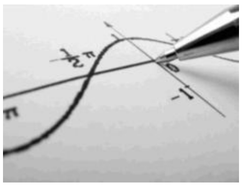
1.11) $\dfrac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + 2\cos(-\pi) + 5\cos 4\pi}{3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 8\cos\left(\frac{9}{2}\pi\right) - \cos(-7\pi)}$

1.12) $\dfrac{\text{sen}\,7\pi + 3\cos\frac{3}{2}\pi - \text{sen}\frac{\pi}{2}}{2\cos(-6\pi) + \text{sen}(-8\pi)}$

2. Mostre que, qualquer que seja α

2.1) $\text{sen}(\pi - \alpha) - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \text{sen}^3\alpha$

2.2) $\cos^2\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 1$



Ficha de Trabalho

- Redução ao 1º quadrante
- Equações trigonométricas

3. Determine $\operatorname{tg}(-\alpha)$ sabendo que $sen(\pi+\alpha)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\alpha \in 3^{o}$ quadrante.

4. Sendo $\cos(\pi-\alpha)=-\dfrac{1}{5}$ e $\alpha\in$ 4º Q., calcule $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+\operatorname{sen}(\pi+\alpha)$.

5. Sabendo que $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=-0{,}8$ e que $\dfrac{\pi}{2}\langle\ \alpha\ \langle\ \dfrac{3\pi}{2}$ determine um valor aproximado de :

   5.1) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$

   5.2) $10\cos\alpha-3\operatorname{sen}\alpha$

6. Determine as soluções de cada uma das equações:

   6.1) $\operatorname{sen}(3x)=\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5}$

   6.2) $\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}$

   6.3) $2\operatorname{sen}x=-\sqrt{3}$

   6.4) $\operatorname{sen}\dfrac{x}{4}=0$

   6.5) $\operatorname{sen}x+1=0$

   6.6) $\operatorname{sen}(2x)=\dfrac{1}{2}$

   6.7) $\cos x=\dfrac{1}{2}$

   6.8) $\cos(2x)=-\cos\dfrac{\pi}{5}$

   6.9) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   6.10) $\cos x+\operatorname{sen}x=0$

   6.11) $\operatorname{sen}(3x)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=0$

   6.12) $\cos\left(\pi+\dfrac{x}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{x}{2}\right)$

   6.13) $\cos x-1=0$

   6.14) $\cos(2x+\pi)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

   6.15) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{3}\right)=-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$

   6.16) $\operatorname{tg}\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

   6.17) $\operatorname{tg}(\pi-2x)=-\sqrt{3}$

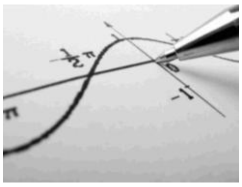
   6.18) $3\operatorname{tg}^2x-1=0$

7. Determine o conjunto de valores de x tais que :

   7.1) $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\quad\wedge\quad x\in\left]-\pi,0\right[$

   7.2) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{5}{3}\pi+x\right)+1=0\quad\wedge\quad x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$

Ficha de Trabalho



- Redução ao 1º quadrante
- Equações trigonométricas

8. Defina, em extensão, os seguintes conjuntos:

8.1) $A = \left\{ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] : \ 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \right\}$

8.2) $B = \left\{ x \in [0, 2\pi] : \text{sen}^2 x = 1 - 2\,\text{cox}\, x + \cos^2 x \right\}$

8.3) $C = \left\{ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi \right[: (\text{tg}\, x - 1)\left(4\cos^2 x - 3\right) = 0 \right\}$

8.4) $D = \left\{ x \in \left[-\pi, \frac{3}{2}\pi \right] : \ (\text{tg}\, x - 1)(2\,\text{sen}\, x + 1) = 0 \right\}$

9. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações trigonométricas:

9.1) $\cos x = \text{sen}^2 x + 1$

9.2) $\text{sen}^2 x = 1 + \cos^2 x$

9.3) $\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right) \cdot \cos(2x) = 0$

9.4) $8\,\text{sen}^2 x - 5 = 6\,\text{sen}\, x$

9.5) $\text{sen}(2x) \cdot \cos\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2}$

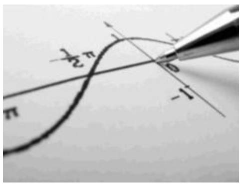
9.6) $\cos^2 x - 3\,\text{sen}^2 x = 0$

9.7) $\cos(\pi + 2x) = \text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)$

9.8) $3\,\text{tg}^2(4x) + \sqrt{3}\,\text{tg}(4x) = 0$

9.9) $3\,tg^2(2x) + 3 = 4\sqrt{3}\,tg(2x)$

Ficha de Trabalho



- Redução ao 1º quadrante
- Equações trigonométricas

SOLUÇÕES DA FICHA DE TRABALHO DE MATEMÁTICA Nº 4:

1.1) 3

1.2) 1

1.3) $\frac{2}{5}$

1.4) 0

1.5) $-\sqrt{3}-1$

1.6) $\frac{3-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$

1.7) $\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$

1.8) $\frac{1-\sqrt{6}}{1-\sqrt{3}}$

1.9) -2

1.10) $\frac{2}{3}$

1.11) 3

1.12) $-\frac{1}{2}$

3) $-\sqrt{3}$ 4) $\frac{6\sqrt{24}}{5}$ 5.1) $-\frac{4}{3}$ 5.2) $-\frac{18}{5}$

6.1) $x=\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{3} \vee x=\frac{4\pi}{15}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in Z$

6.2) $x=-\frac{5\pi}{12}+2k\pi \vee x=\frac{11}{12}\pi+2k\pi, k\in Z$

6.3) $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi, k\in Z$

6.4) $x=4k\pi, k\in Z$

6.5) $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi, k\in Z$

6.6) $x=\frac{\pi}{12}+k\pi \vee x=\frac{5}{12}\pi+k\pi, k\in Z$

6.7) $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$

6.8) $x=\frac{2\pi}{5}+k\pi \vee x=-\frac{2\pi}{5}+k\pi, k\in Z$

6.9) $x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi \vee x=-\pi+2k\pi,\ k\in Z$

6.10) $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$

6.11) $x=\frac{k\pi}{2}, k\in Z$

6.12) $x=-\pi+2k\pi, k\in Z$

6.13) $x=2k\pi, k\in Z$

6.14) $x=-\frac{4\pi}{3}+2k\pi \vee x=-\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}, k\in Z$

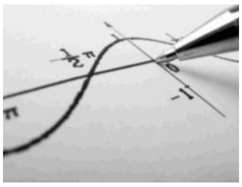
6.15) $x=-\pi+3k\pi, k\in Z$

6.16) $x=\frac{k\pi}{2}, k\in Z$

6.17) $x=\frac{2\pi}{3}-\frac{k\pi}{2}, k\in Z$

6.18) $x=\frac{\pi}{6}+k\pi \vee x=-\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in Z$

Ficha de Trabalho



- Redução ao 1º quadrante
- Equações trigonométricas

7.1) $\varnothing$

7.2) $\varnothing$

8.1) $A=\left\{-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right\}$

8.2) $B=\left\{0,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},2\pi\right\}$

8.3) $C=\left\{-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right\}$

8.4) $D=\left\{-\frac{3\pi}{4},-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{4}\right\}$

9.1) $x=2k\pi, k\in Z$

9.2) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$

9.3) $x=3k\pi \ \vee\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z$

9.4) $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \vee\ x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$

9.5) $x=\pi+2k\pi \ \vee\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$

9.6) $x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \vee\ x=\pm\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$

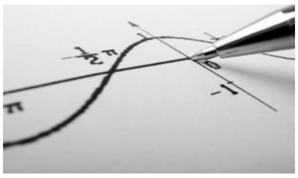
9.7) $x=\frac{2k\pi}{3} \ \vee\ x=-2\pi+2k\pi, k\in Z$

9.8) $x=\frac{k\pi}{4} \ \vee\ x=-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{4}, k\in Z$

9.9) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \ \vee\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z$

Ficha de Trabalho

- Funções trigonométricas

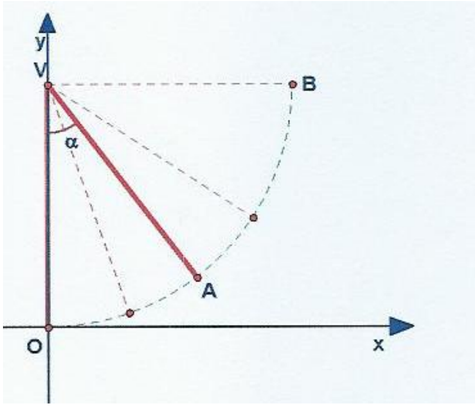


1) Um pêndulo improvisado é constituído por um fio de $12\,m$ de comprimento e por uma esfera, conforme está representado no referencia o.n. xOy da figura.

Admita que o centro da esfera se desloca de O (origem do referencial) até B, sem retorno.

Sabe-se que:

- $\overline{VO} = 12\ m$;
- A unidade do referencial é o metro;
- $[OV] \perp [VB]$;
- $O\hat{V}A = \alpha\ radianos$;
- $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$



1.1) Exprima, em função de α, as coordenadas do ponto A.

1.2) Determine um valor aproximado de α, a menos de $0,01$, do instante em que o ponto A dista $3\,m$ do eixo Ox.

1.3) Determine por processos analíticos o valor de α, para o qual A dista $6\,m$ do eixo Oy.

Admita que a distância, em metros, do ponto A à origem do referencial, t segundos após o início do movimento, é dada por: $d(t) = 24\,sen\left(\frac{\pi t}{16}\right)$.

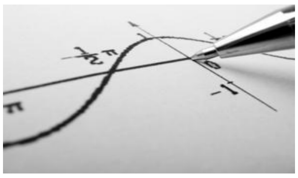
1.4) Ao fim de quanto tempo o ponto A está a $12\,m$. Apresente o resultado às décimas de segundo.

1.5) Ao fim de quanto tempo o movimento é concluído, isto é, o ponto A coincide com o ponto B.

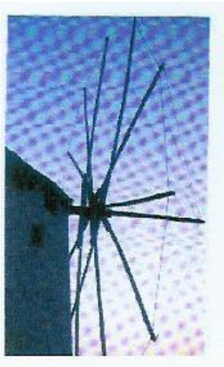
1.6) Recorrendo à calculadora, determine durante quanto tempo a distância de A à origem é superior a $5\,m$. Explique como procedeu, incluindo na explicação o gráfico ou gráficos obtidos na calculadora. Apresente o resultado com aproximação às centésimas.

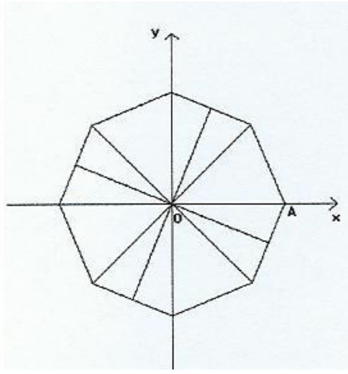
Ficha de Trabalho

- Funções trigonométricas



2) Considere o moinho de vento e a representação no plano do respectivo sistema das hastes num referencial, tal como é esquematizado na figura.





Seja A o ponto que representa a extremidade de uma das hastes das velas, O o centro de rotação e $\overline{OA}$ a unidade do referencial o.n. xOy.

No movimento das hastes do moinho em torno do ponto O, seja x a medida da amplitude, em radianos, do arco descrito pelo ponto A.

Considere a função f que a cada x faz corresponder a ordenada do ponto A.

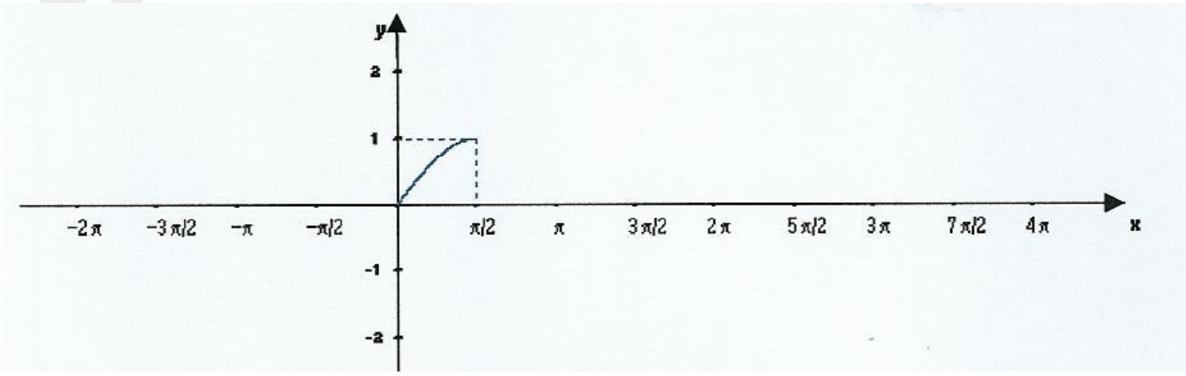
2.1) Complete a tabela calculando a ordenada do ponto A nas várias situações:

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$f(x)$					

2.2) Indique a expressão que defina $f(x)$.

2.3) Quais os valores que a ordenada do ponto A pode tomar? O que pode concluir quanto ao contradomínio da função f ?

2.4) Na figura seguinte está parte de uma representação gráfica de f no intervalo $[0, 2\pi]$.



2.4.1) Complete-a, sem recorrer à calculadora e explique como procedeu.

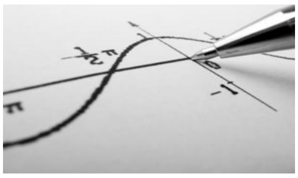
2.4.2) Prolongue a representação gráfica no intervalo $[-2\pi, 4\pi]$ e explique, igualmente como procedeu.

2.4.3) Verifique, usando a calculadora.

2.5) Dado qualquer x, qual o menor valor positivo p que satisfaz a condição $f(x+p)=f(x)$?

Ficha de Trabalho

- Funções trigonométricas



3) As marés são fenómenos periódicos, que podem ser modelados por uma função do tipo $Y = a + b\, sen\left(c\,t + d\right)$, em que Y é o nível da água, em metros, e t o tempo, em horas.

Numa praia da costa portuguesa, em determinado dia foram feitas medições que permitiram chegar à seguinte função: $Y = 4 + 2\, sen\left(\frac{t}{2}\right)$

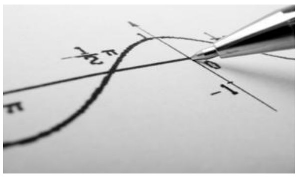
3.1) Com o auxilio da calculadora gráfica, esboce o gráfico da função, **durante o período de um dia**.

3.2) Às oito horas da tarde, qual era o nível da água? Apresente o resultado com aproximação às décimas.

3.3) Em que momento a água atingiu o nível de 4 metros? (Resolva esta questão analiticamente.)

3.4) Qual é o período desta função? Como explicaria este facto a alguém que não saiba matemática?

Ficha de Trabalho



- Funções trigonométricas

Soluções da Ficha de Matemática nº 5:

1.1) $A(12\,sen\,\alpha, 12-12\cos\alpha)$

1.2) 0,72 radianos

1.3) $\frac{\pi}{6}$

1.4) 2,7 s

1.5) 2, 93 s

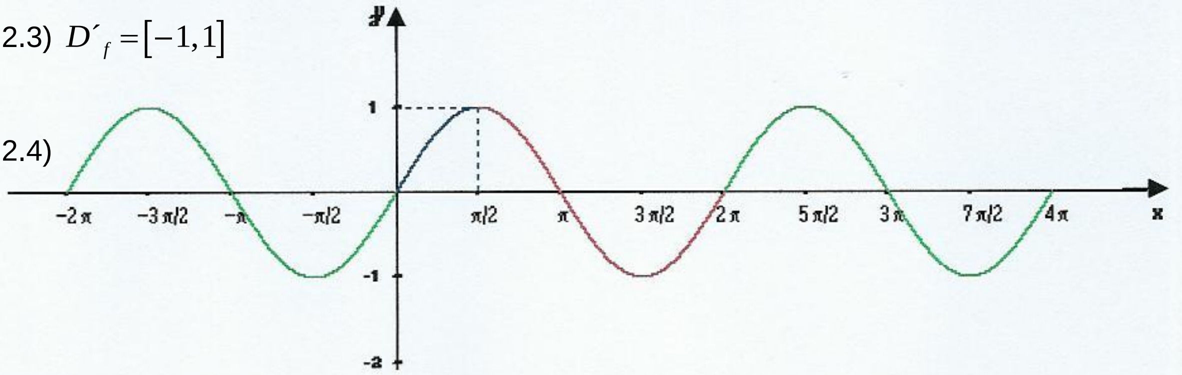
2.1)

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2.2) $f(x)=sen(x)$

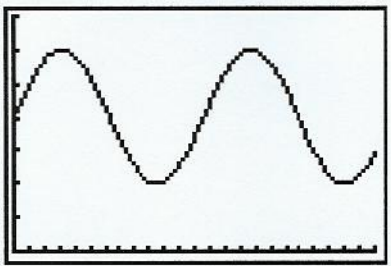
2.3) $D'_f=[-1,1]$

2.4)

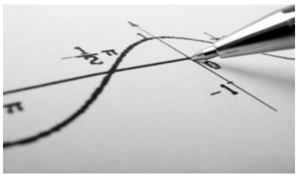


2.5) 2π

3.1)

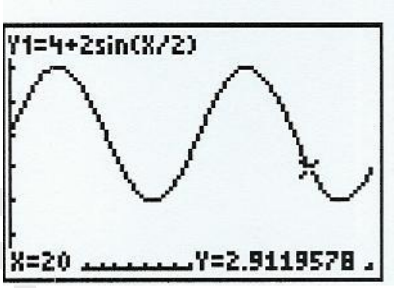


Ficha de Trabalho



- Funções trigonométricas

3.2) 2,9 m



3.3) $t=\dfrac{\pi}{3} \vee t=\dfrac{5\pi}{3} \vee t=\dfrac{13\pi}{3} \vee t=\dfrac{17\pi}{3}$ (ou seja, 1h 2 m, 5h 15m, 13h 37m e 17h 48m)

3.4) 4π

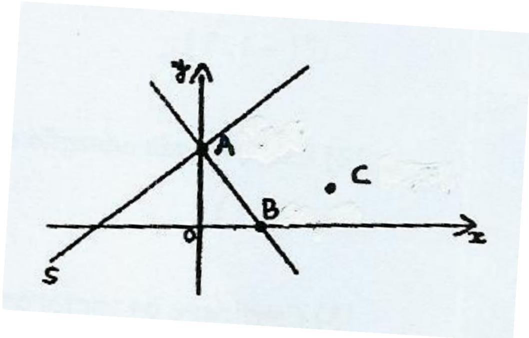
Ficha de Trabalho

- Estudo da recta no plano
- Paralelismo e perpendicularidade

1) Determine o ângulo formado pelas rectas de equação:

$r: -x+2y+1=0 \quad e \quad s: y=-3x-5$

2) Observe a figura onde:



A (0,2)

B (2,0)

C (4,1)

2.1) Determine o declive da recta AB.

2.2) Escreva a equação reduzida da recta s,

Perpendicular a AB e que contém A.

2.3) Averigúe se a recta s e a recta $t: y=-3x+1$ são ou não perpendiculares.

3) Considere as rectas r e s, definidas pelas equações:

$$r: y=\frac{1}{5}x-2 \qquad e \qquad s:(x,y)=\left(0,-\frac{1}{2}\right)+k(2,3),\ k\in\mathbb{R}$$

3.1) Determine o ângulo formado pelas rectas r e s.

3.2) Escreva a equação reduzida da recta perpendicular a r, que passa pelo ponto A $\left(0,\frac{3}{5}\right)$.

4) Determine a inclinação $y=\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}$.

5) Escreva a equação reduzida da recta que passa pela origem das coordenadas e que é perpendicular à recta AB, sabendo que A$(2,-1)$ e B $(-3,3)$.

6) Utilizando o produto escalar, escreva a equação da circunferência de diâmetro [AB] sendo A$(2,-1)$ e B $(4,-3)$.

7) Sabendo que a inclinação de uma determinada recta é 60º, determine um vector director da recta.

8) Considere a recta $r: -2x+3y-4=0$.

8.1) Indique as coordenadas de um vector director da recta.

8.2) Indique um vector director da recta s, perpendicular à recta r.

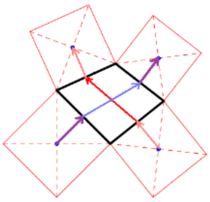
9) Determine o número real k de modo que as rectas de equação $y=-2x$ e $kx-2y+1=0$, sejam perpendiculares.

10) Escreva uma equação da recta tangente à circunferência de equação

$(x+1)^2+(y+1)^2=25$,no ponto T $(2,3)$.

11) Escreva uma equação da tangente em A $(3,2)$ à circunferência de centro C $(-1,3)$.

Ficha de Trabalho



- Estudo da recta no plano
- Paralelismo e perpendicularidade

12) Escreva uma equação da recta que tem inclinação $\frac{4\pi}{3}$ e que passa pelo ponto $(1,3)$.

13) Considere os vectores $\vec{u}(2,0,1)\ e\ \vec{v}(1,-2,-1)$.

13.1) Calcule as coordenadas de um vector $\vec{x}$ de norma 3, perpendicular a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

13.2) Calcule a amplitude do ângulo formado pelos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

14) Considere duas rectas $r\ e\ s$, definidas do seguinte modo:

$$r:\ mx+y-3=0 \quad e \quad s:(x,y)=(-1,0)+k\left(-\frac{1}{2},2\right),\ k\in\mathbb{R}$$

14.1) Indique o declive da recta s.

14.2) Indique um vector director da recta r em função de m.

14.3) Determine m de modo que as rectas $r\ e\ s$ sejam perpendiculares.

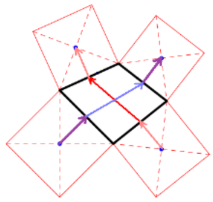
15) Considere num referencial o.n. os vectores

$$\vec{u}=\left(\sqrt{2}+tg\,\alpha\,,\ sen\,\alpha\right)\ e\ \vec{v}=\left(\sqrt{2}-tg\,\alpha\,,\frac{1}{\cos\alpha}\right)\ ,\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

15.1) Determine $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ de modo que os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam perpendiculares.

15.2) Sabendo que $3\,sen^2\alpha+sen\,\alpha=0\,,\ \alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, determine as coordenadas do vector $\vec{u}$.

Ficha de Trabalho



- Estudo da recta no plano
- Paralelismo e perpendicularidade

Soluções:

1) 81,87º 2.1) – 1 2.2) $y = x + 2$ 2.3) s e t não são perpendiculares.

3.1) 45º 3.2) $y = -5x + \frac{3}{5}$ 4) 59,04º 5) $y = \frac{5}{4}x$

6) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 2$ 7) $\vec{d} = (1, \sqrt{3})$ 8.1) $\vec{d} = (3, 2)$ 8.2) $-\frac{3}{2}$

9) $k = 1$ 10) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$ 11) $y = 4x + 10$ 12) $y = \sqrt{3}x + 3 - \sqrt{3}$

13.1) $\vec{d} = \left(\frac{6\sqrt{29}}{29}, \frac{9\sqrt{29}}{29}, -\frac{12\sqrt{29}}{29}\right)$ 13.2) $\vec{d} = \left(-\frac{6\sqrt{29}}{29}, -\frac{9\sqrt{29}}{29}, \frac{12\sqrt{29}}{29}\right)$ 13.3) 79,48º

14.1) -4 14.2) (1 ,-m) 14.3) $-\frac{1}{4}$ 15.1) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 15.2) $tg\ \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

Ficha de Trabalho

- Cálculo vetorial

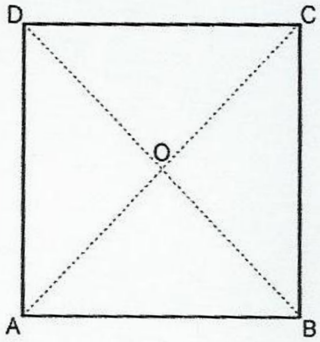
1) Na figura ao lado [ABCD] é um quadrado de lado 5 cm. O é o ponto de intersecção das diagonais.
Calcula:

1.1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$;

1.2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$;

1.3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$;

1.4) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{DC}$.

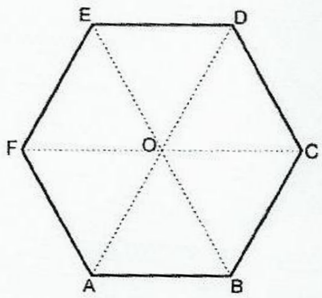


2) Na figura ao lado [ABCDEF] é um hexágono regular de lado 1 cm.
Calcula:

2.1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$;

2.2) $\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{AO}$;

2.3) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}$.



3) Calcula:

3.1) $3\vec{u}\cdot(4\vec{u}+6\vec{v})$, sendo
$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 3 \quad e \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = -1$

3.2) $(\ 2\vec{u} \ + \ 2\vec{v})\cdot\vec{v}$ sendo
$\|\vec{u}\| = 2 \ ; \ \|\vec{v}\| = 3 \quad e \quad \vec{u}\hat{\ }\vec{v} = \dfrac{\pi}{6}$

4) Sabe-se que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 1$ e $\cos\left(\vec{u}\hat{\ }\vec{v}\right) = \dfrac{1}{3}$. Calcula k de modo que $k\vec{u}+2\vec{v}$ e $\vec{u}$ sejam dois vectores perpendiculares.

5) Determina um vector de norma 5 que seja perpendicular ao vector $(1,-3)$.

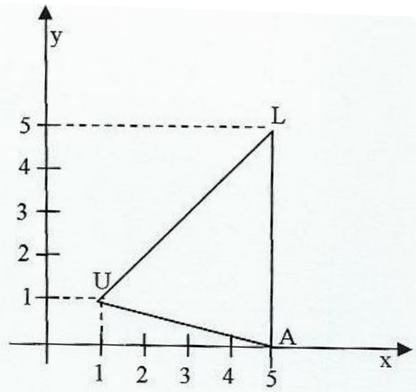
6) Sendo $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{v}\| = 1$ e $\left(\vec{u}\hat{\ }\vec{v}\right) = 45^{\circ}$, $\vec{a} = \vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{b} = \vec{u}-\vec{v}$ determina $\vec{a}.\vec{b}$.

Sugestão: Recorda que $\vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|^2$ *ou seja,* $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})}$

Ficha de Trabalho

- Cálculo vetorial

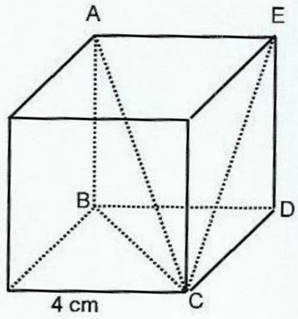
7) Na figura, [LUA] é um triângulo.
Determina a amplitude de cada um dos ângulos internos do triângulo



8) Na figura está representado um cubo com 4 cm de aresta.
Calcula:

8.1) $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED}$

8.2) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$

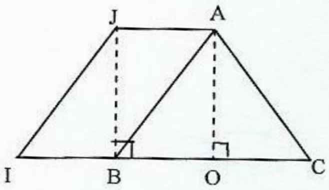


9) Na figura, [ABC] é um triângulo isósceles e [ABIJ] um paralelogramo.
Sendo $\overline{BC} = 6$, calcule:

9.1 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$

9.2 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JC}$

9.3 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AI}$



10) Considere um triângulo equilátero [ABC].
Sendo $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{w}$ e $\overline{AB} = 3$, calcule:

10.1 $\vec{u} \cdot \vec{w}$

10.2 $\vec{v} \cdot (-\vec{w})$

10.3 $\vec{u} \cdot (-\vec{v})$

10.4 $-\vec{u} \cdot \vec{w}$

10.5 $\vec{w} \cdot \overrightarrow{BK}$, sendo K o ponto médio do lado [AC].

11) Considera os vectores: $\vec{u} = (-2,\ 5)$; $\vec{v} = (3\ ,\ 2)$ *e* $\vec{w} = (2,\ -5)$.

11.1) Representa os vectores num referencial.

11.2) Calcula: $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{v}\|$; $\|\vec{w}\|$.

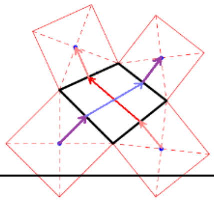
11.3) Calcula: $\vec{u} \cdot \vec{v}$; $\vec{v} \cdot \vec{w}$; $\vec{u} \cdot \vec{w}$.

11.4) Determina:

11.4.1) $\left(\vec{u}\,\hat{}\,\vec{v}\right)$ **11.4.2)** $\left(\vec{v}\,\hat{}\,\vec{w}\right)$ **11.4.3)** $\left(\vec{u}\,\hat{}\,\vec{w}\right)$

Ficha de Trabalho

- Cálculo vetorial



12) Dados os vectores $\vec{u} = (1,3)$ *e* $\vec{v} = (-5,6)$, calcula:

12.1) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

12.2) O ângulo dos dois vectores

13) Sendo $A(3,4)$; $B(-2,1)$ *e* $C(-4,-2)$:

13.1) Calcula:

13.1.1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

13.1.2) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA}$

13.2) Determina o ângulo dos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$

14) Sendo $\vec{a} = (1,0,3)$, $\vec{b} = (2,-5,0)$ e $\vec{c} = (0,1,-3)$, calcula:

14.1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

14.2) $\vec{a} \cdot \vec{c}$

14.3) $\vec{b} \cdot \vec{c}$

15) Considera os pontos A (0, 3) e B (-2, 1). Recorrendo à definição de produto escalar, determina:

15.1) Uma equação da mediatriz do segmento de recta [AB];

15.2) Uma equação da circunferência de diâmetro [AB].

16) Considera a circunferência $C: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$.

16.1) Verifica que o ponto A (1, 2) pertence a C.

16.2) Determina uma equação da recta tangente à circunferência C no ponto A.

17) Considera os pontos $A(4,3)$ e $B(-2,-1)$.

17.1) Escreve as coordenadas do vector $\overrightarrow{AB}$.

17.2) Usando a definição de produto escalar, escreve uma equação:

17.2.1) da mediatriz de [AB];

17.2.2) da circunferência de diâmetro [AB];

17.2.3) da tangente à circunferência de diâmetro [AB], no ponto B.

18) Sendo $\vec{u} = (1, 1, 3)$ e $\vec{v} = (0, 2, -3)$, calcula:

18.1) $-2\vec{u} \cdot \vec{v}$

18.2) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

18.3) $(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v})$

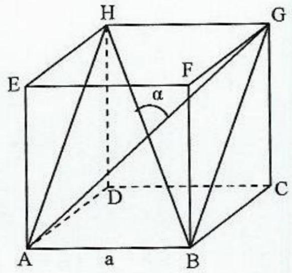
18.4) $\vec{v}(\vec{v} + 10\vec{u}) - \vec{u} \cdot (3\vec{v})$

19) Recorrendo à definição de produto escalar determina uma equação do plano mediador de [AB] sendo A = (3, -1, 2) e B = (1, 3, 0).

Ficha de Trabalho

- Cálculo vetorial

20) Considera o cubo [ABCDEFGH] de aresta **a**. Usa o produto escalar para determinar a medida da amplitude do ângulo α de duas diagonais espaciais do cubo.



21) Sendo $\vec{u} = (4,\ 2,\ 1)$, escreve:

21.1) As coordenadas de 3 vectores perpendiculares a $\vec{u}$.

21.2) A expressão geral que representa todos os vectores do espaço perpendiculares ao vector $\vec{u}$.

22) Determina um vector que no espaço seja perpendicular ao vector $\vec{a} = (-1,\ 0,\ 2)$ e tenha norma $\sqrt{5}$.

23) No referencial *o.n.* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, tem-se: $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$; $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k})$;

$\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$. Mostra que: $\vec{a} \perp \vec{b}$; $\vec{a} \perp \vec{c}$ e $\vec{c} \perp \vec{b}$.

Ficha de Trabalho

- Cálculo vetorial

Soluções da Ficha de Trabalho de Matemática nº 7:

1.1 0 **1.2** 25 **1.3** -25 **1.4** $\frac{25}{2}$ **2.1** $\frac{1}{2}$ **2.2** $-\frac{1}{2}$ **2.3** $\frac{1}{2}$ **3.1** 90

3.2 $6\sqrt{3}+18$ **4** $-\frac{2}{9}$ **5** $\left(\frac{3\sqrt{10}}{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ **6** 4 **7** $\sphericalangle\left(\overrightarrow{UA},\overrightarrow{UL}\right)=59^\circ 02'10''$

$\sphericalangle\left(\overrightarrow{AU},\overrightarrow{AL}\right)=75^\circ 57'50''$ $\sphericalangle\left(\overrightarrow{LU},\overrightarrow{LA}\right)=45^\circ$ **8.1** 16 **8.2** 16 **9.1** 18 **9.2** 36

9.3 -36 **10.1** $\frac{9}{2}$ **10.2** $-\frac{9}{2}$ **10.3** $\frac{9}{2}$ **10.4** $-\frac{9}{2}$ **10.5** 0

11.2 $\|\vec{u}\|=\sqrt{29},\ \|\vec{v}\|=\sqrt{13},\ \|\vec{w}\|=\sqrt{29}$ **11.3** $\vec{u}\cdot\vec{v}=4,\ \vec{v}\cdot\vec{w}=-4,\ \vec{u}\cdot\vec{w}=-29$

11.4 $\vec{u}\,\hat{}\,\vec{v}=86^\circ 43'28'',\ \vec{v}\,\hat{}\,\vec{w}=97^\circ 55'41'',\ \vec{u}\,\hat{}\,\vec{w}=180^\circ$ **12.1** 13 **12.2** $58^\circ\, 14'\, 26''$ **13.1.1** 19

13.1.2 -53 **13.2** $25^\circ\, 20'\, 46''$ **14.1** 2 **14.2** -9 **14.3** -5 **15.1** $y=-x+1$

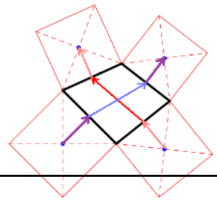
15.2 $x^2+y^2+2x-4y+3=0$ **16.2** $y=-2x+4$ **17.1** $(-6,-4)$ **17.2.1** $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

17.2 $x^2+y^2-2x-2y-11=0$ **17.3** $y=\frac{3}{2}x+2$ **18.1** 14 **18.2** -2 **18.3** 41

18.4 -38 **19** $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ **20** $54^\circ\, 44'\, 08''$ **21.1** p.e. $(2,-4,0);\ (1,0,-4);\ (0,1,-2)$

21.2 p.e. $(x,y,-4x-2y)$ **22** p.e. $(2,0,1)$ **24.1.1** $y=-x-\frac{1}{3}$

Ficha de Trabalho nº8



- Rectas e planos

1) Determine o ângulo que as rectas formam entre si:

1.1) $y=2x+1$ e $y=-3x$

1.2) $3x+2y-2=0$ e $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}$

1.3) y= -2x+3 e y = 3

1.4) $-y+x-3=0$ e $y=0$

1.5) $(x,y)=(1,2)+k(3,4), k\in\mathbb{R}$ e $y=x-1$

2) Determine a inclinação das rectas:

2.1) $y=-2x+1$

2.2) Que contém os pontos A $(1,0)$ e B $(3,-1)$

2.3) $y=0$

2.4) $x=0$

2.5) $(x,y)=(1,2)+k(3,4), k\in\mathbb{R}$

3) Seja s uma recta que contém o ponto A $(-1,1)$ e tem a direcção do vector $\vec{u}(-3,-1)$ e t uma recta que contém o ponto A e tem direcção perpendicular ao vector $\vec{v}(2,3)$.

3.1) Escreva a equação reduzida da recta s.

3.2) Escreva a equação vectorial da recta t.

3.3) Escreva a equação da recta que contém o ponto A e é perpendicular ao vector $\vec{u}$.

3.4) Determine a inclinação da recta s.

3.5) Sendo B $(3,-2)$, determine o declive e a inclinação da recta AB.

3.6) Determine o ângulo que a recta AB faz com o eixo dos yy.

3.7) Sendo P $(1,a)$, determine a de modo que o triângulo [PAB] seja rectângulo em B.

4) Escreva a equação da recta que contém o ponto A $(-1,3)$ e é perpendicular à recta de equação:

4.1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}$

4.2) $2x-3y+5=0$

4.3) $x=10$

4.4) $y=-3$

4.5) $(x,y)=(-1,5)+k(2,3), k\in\mathbb{R}$

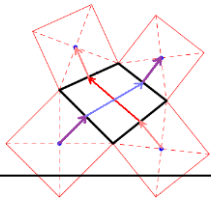
5) Determine os valores de a para que as rectas de equações $y=ax+5$ e $y=\frac{3}{a+2}x-6$ sejam:

5.1) Paralelas.

5.2) Perpendiculares.

6) Determine os vectores perpendiculares à recta de equação $y=-\frac{3}{4}x+1$ que têm norma 10.

Ficha de Trabalho nº8



- Rectas e planos

7) Considere a recta r de equação $2x+y-3=0$.

7.1) Determine a abcissa do ponto da recta que tem ordenada 6.

7.2) Determine a de modo que P $\in r$ sendo P $(2,a)$.

7.3) Determine a equação reduzida da recta s que contém A $(-1,5)$ e é paralela a r.

7.4) Determine uma equação da recta t que contém a origem das coordenadas e é perpendicular à recta r.

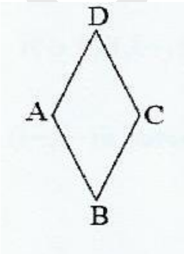
7.5) Determine a equação da recta que é perpendicular a r e tem ordenada na origem 3.

7.6) Determine a equação da recta que é perpendicular a r e contém o ponto do eixo dos xx de abcissa 5.

7.7) Quantas rectas, do plano, existem perpendiculares à recta r?

7.8) Escreva uma expressão que represente a família das rectas do plano perpendiculares a r.

8) [ABCD] é um losango em que A $(3,1)$ e C $(-1,5)$.



8.1) Escreva a equação da recta BD (tenha presente que as diagonais de um losango são perpendiculares).

8.2) Determine as coordenadas dos pontos B e D sabendo que $\overline{AB}=\sqrt{10}$ (considere um ponto genérico X da recta BD).

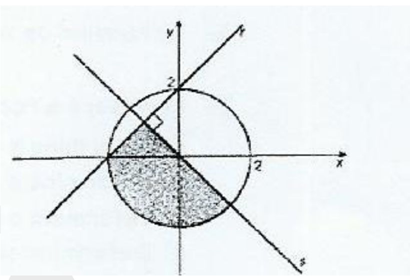
9) Determine uma equação da recta tangente à circunferência de equação $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ no ponto de ordenada 3 e abcissa positiva.

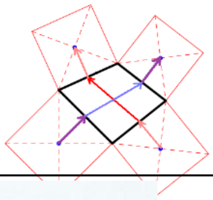
10) Escreva uma equação da circunferência de centro $(-1,5)$ e tangente à recta de equação $y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$.

11) Escreva equações das rectas tangentes à circunferência de equação $x^2+y^2+6x-4y=3$ perpendicular ao vector $\vec{v}(0,4)$.

12) Um quadrado inscrito na circunferência de equação $(x-2)^2+(y-2)^2=10$ tem um vértice em A $(3,-1)$. Determine as coordenadas dos restantes vértices do quadrado.

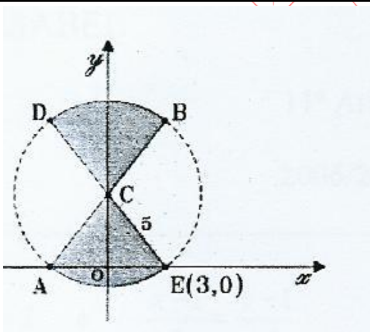
13) Escreva uma condição que caracterize o domínio plano sombreado.





Ficha de Trabalho nº8

- Rectas e planos



14) O ponto C situa-se nos eixos dos yy e é o centro da circunferência.

Sabe-se que $\overline{CE}=5$

14.1) Determine as equações das rectas AB e DE.

14.2) Determine uma condição que caracterize a zona sombreada da figura.

15) Represente graficamente

15.1) $y\leq x-2 \wedge x\leq 4 \wedge y\geq 0$

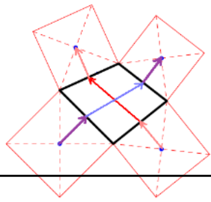
15.2) $y\geq |x+2| \wedge y\geq 0$

15.3) $y\geq 0 \wedge x^2+y^2\leq 4$

15.4) $\left(y\geq |x-2| \wedge y\leq 2 \right) \vee (x-2)^2+(y-3)^2\leq 1$

Ficha de Trabalho nº8

- Rectas e planos



Soluções:

1.1) $\alpha = 45^\circ$ 1.2) $\alpha = 0^\circ$ 1.3) $\alpha = 26,6^\circ$ 1.4) $\alpha = 45^\circ$ 1.5) $\alpha = 8,1^\circ$

2.1) $116,6^\circ$ 2.2) $153,4^\circ$ 2.3) 0° 2.4) 90° 2.5) $53,13^\circ$

3.1) $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ 3.2) $(x, y) = (-1,1) + k(3,-2), k \in \mathbb{R}$ 3.3) $y = -3x - 2$

3.4) $18,43^\circ$ 3.5) $m = -\frac{3}{4}$; $143,13^\circ$ 3.6) $53,13^\circ$ 3.7) $a = -\frac{14}{3}$

4.1) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ 4.2) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ 4.3) $y = 3$ 4.4) $x = -1$

4.5) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

5.1) $a = 1 \vee a = -3$ 5.2) $a = -\frac{1}{2}$

6) $(6,8);(-6,-8)$

7.1) $-\frac{3}{2}$ 7.2) -1 7.3) $y = -2x + 3$ 7.4) $y = \frac{1}{2}x$

7.5) Por exemplo, $(x, y) = (0,3) + k(2,1), k \in \mathbb{R}$ 7.6) $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ 7.7) Infinitas

7.8) $y = \frac{1}{2}x + k, k \in \mathbb{R}$

8.1) $y = x + 2$ 8.2) B $(0,2)$; D $(2,4)$

9) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{27}{4}$

10) $(x+1)^2 + (y-5)^2 = \left(\frac{18}{5}\right)^2$ 11) $y = -2 \ e \ y = 6$

12) $(1,5);(5,3);(-1,1)$ 13) $y \leq -x \wedge y = x + 2 \wedge x^2 + y^2 \leq 4$

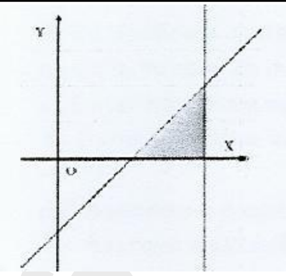
14.1) $y = \frac{4}{3}x + 4$; $y = -\frac{4}{3}x + 4$

14.2) $\left[\left(y \geq -\frac{4}{3}x + 4 \wedge y \geq \frac{4}{3}x + 4\right) \vee \left(y \leq -\frac{4}{3}x + 4 \wedge y \leq \frac{4}{3}x + 4\right)\right] \wedge \left[x^2 + (y-4)^2 \leq 25\right]$

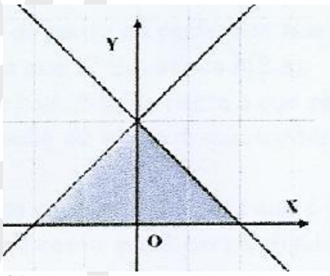
Ficha de Trabalho nº8

- Rectas e planos

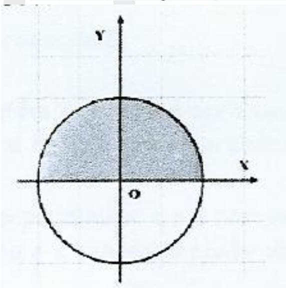
15.1)



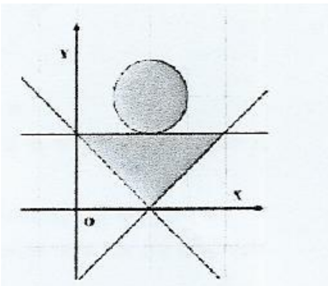
15.2)



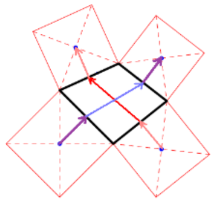
15.3)



15.4)



Ficha de Trabalho nº9



- Equação geral do plano
- Paralelismo e perpendicularidade entre rectas e planos
- Equações cartesianas de rectas no espaço.
- Intersecção de planos

1) Verifique se os pontos A $(1,2,1)$, B $(1,4,2)$ e C $(3,1,1)$ definem um plano.

2) Indique equações do plano que:

2.1) Passa por A $(1,3,-1)$ e é perpendicular ao vector $\vec{u}(2,5,-4)$.

2.2) Passa por A $(1,0,-3)$ e é perpendicular à recta $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-5}{-4}$.

2.3) Contém o ponto A $(0,1,2)$ e é paralela ao plano $x-y-3z+1=0$.

2.4) É definido pelos pontos A $(0,0,1)$, B $(2,0,0)$ e C $(0,3,0)$.

2.5) Passa por A $(7,7,2)$ e é paralelo às rectas $x=2 \wedge y=3$ e $\frac{x-1}{3}=y=z-1$.

2.6) Passa por A $(7,7,2)$ e é paralelo aos vectores $\vec{u}(1,1,1)$ e $\vec{v}(-1,0,1)$.

2.7) Passa por A $(7,7,2)$ e pela recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=z$.

2.8) Contém as rectas paralelas $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}$ e $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-1}{8}$.

2.9) É perpendicular à recta $x=1 \wedge \frac{y-2}{3}=\frac{1-z}{2}$ e passa na origem das coordenadas.

2.10) Passa pelo ponto A $(1,3,2)$ e é perpendicular ao eixo dos yy.

3) Determine uma equação do plano mediador do segmento de recta [AB] em que A $(2,3,0)$ e B $(-1,4,2)$.

4) Indique um vector perpendicular ao plano:

4.1) $-x-3y+z+1=0$

4.2) $z=0$

4.3) $x+4y-5z=0$ e que tenha norma $2\sqrt{26}$.

5) Verifique se a recta de equação $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-9}=3-z$ é paralela ao plano de equação $2x+y-3z-4=0$.

6) Mostre que a recta de equação $x-2=-2z \wedge 2x-4=y-3$ está contida no plano de equação $3x-y+2z-3=0$

7) Sendo $\alpha: x-3y+z=1$ e $r:(x,y,z)=(n,2,0)+k(2,m,n), k\in\mathbb{R}$. Determine n e m de forma que a recta r pertença ao plano α.

8) Determine o ponto de intersecção da recta $r\!: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{5}$ com o plano $\alpha\!: 2x-y+4z-6=0$

9) Justifique que os planos $2x+3y-z+5=0$ e $x-y-z+8=0$ são perpendiculares e determine a recta de intersecção dos dois planos.

10) Seja $\alpha\!: x+2y-z+8=11$ e $\beta\!: 2x+by+cz+d=0$. Determine $b, c\; e\; d$ de modo que os dois planos sejam paralelos e o plano β passe pelo ponto P$(1,1,0)$.

11) Considere os planos de equações:

$$\pi\!: 2x-y+3z-1=0 \;\; e \;\; \alpha\!: mx-(m-2)y+6z-8m=0\,,\; m\in\mathbb{R}$$

11.1) Determine m de modo que α seja paralelo a π.

11.2) Determine m de modo que α seja perpendicular a π.

11.3) Verifique que para cada valor de $m\in\mathbb{R}$ o ponto P(m, m, m) pertence ao plano α.

12) Considere os pontos A $(-1,2,1)$, B $(0,1,1)$ e C $(0,0,2)$. Determine

12.1) Uma equação da recta AB

12.2) O ângulo que a recta $r\!: x=2-y=1-z$ faz com a recta AB.

12.3) Uma equação do plano α, mediador de [AB].

12.4) Uma equação do plano β definido pela recta AB e pelo ponto C.

12.5) Uma equação da recta t, que passa em A e é perpendicular a β.

13) Escreva as equações cartesianas das rectas que contêm o ponto A$(0,5,-2)$ e têm a direcção dos vectores:

13.1) $\vec{u}(1,2,3)$

13.2) $\vec{v}(1,0,3)$

13.3) $\vec{w}(-1,0,0)$

14) Considere as rectas $r\!: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{-5}=\dfrac{2-z}{3}$ $\quad e \quad$ $s\!: \begin{cases} x=\dfrac{z+3}{2} \\ y=4 \end{cases}$

14.1) Indique um vector director e dois pontos de cada uma das rectas.

14.2) Averigúe se os pontos A $(2,3,5)$ e B $(-1,1,5)$ pertencem à recta r.

14.3) Escreva as coordenadas de um ponto genérico da recta r em função de k e da recta s em função de α.

14.4) Determine as coordenadas do ponto da recta r que tem:

14.4.1) Abcissa 0   14.4.2) Ordenada – 4   14.4.3) Cota – 1

14.5) Determine as coordenadas do ponto da recta s que:

14.5.1) Pertence ao plano xoy.

14.5.2) Intersecta o plano β, sendo este paralelo a zoy e que contém o ponto $(3,0,0)$.

15) Determine equações da recta que:

15.1) Contém os pontos A $(3,1,0)$ e B $(7,8,9)$

15.2) Contém os pontos A $(9,0,4)$ e é paralela à recta de equação $\begin{cases} x-1=3y+2 \\ z=5 \end{cases}$

15.3) É paralela ao eixo Oz e contém o ponto $(0,-1,2)$.

15.4) É perpendicular à recta $\frac{x-1}{3}=y=\frac{z-1}{4}$ e passa pela origem.

16) Para cada uma das rectas indique um vector director e um ponto:

16.1) $\frac{2x}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5}$

16.2) $x-3=2y+5=5-8z$

16.3) $x-3=y+1 \wedge z=2$

16.4) $y=4 \wedge 2x-3=4+z$

16.5) $x+y-z=1 \wedge 2x+y-z=3$

16.6) $2x-y-7z=-1 \wedge -x+3y+2z=0$

17) Dada a recta $r:(x,y,z)=(2,1,1)+k(1,1,1), k\in\mathbb{R}$ e os pontos A $(1,1,0)$ e B $(0,0,1)$, determine o ponto r equidistante de A e de B.

18) Determine o ângulo das rectas r e s, sendo:

18.1) $r:(x,y,z)=(0,1,-3)+k(2,0,-3), k\in\mathbb{R}$ e $s:\begin{cases} \frac{x+1}{4}=\frac{z-1}{-6} \\ y=4 \end{cases}$

18.2) r é a recta que contém os pontos A $(1,0,2)$ e B $(-1,3,2)$ e $s: x=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{4}$.

18.3) $r:\begin{cases} \frac{x-1}{2}=\frac{z-1}{5} \\ y=0 \end{cases}$ $\quad s:\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

18.4) $r: x=y=z$ e $s:(x,y,z)=(4,2,3)+k(1,1,1), k\in\mathbb{R}$

18.5) $r:(x,y,z)=(1,2,0)+k\left(1,-1,\sqrt{2}\right), k\in\mathbb{R}$ e o eixo dos yy.

19) Mostre que são coincidentes as rectas : $r:\frac{x-1}{-2}=y-3=z$ e $s:\frac{x+3}{6}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-2}{-3}$

20) Averigúe qual a posição relativa das rectas no espaço:

20.1) $\frac{x-1}{2}=y=z-3$ e $x-2=\frac{y+1}{-4} \wedge z=-1$

20.2) $\frac{2x-1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ e $\frac{x}{-6}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+3}{2}$

20.3) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-5}$ e $x-3=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}$

20.4) $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=-2 \\ z=5t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ e $2x-3z=7$

21) Sendo A $(2,-5,a)$, B $(4,a,-1)$ e C $(a,-5,2)$ os vértices de um triângulo [ABC].

Determine a de modo que o triângulo seja rectângulo em A.

22) Determine uma equação vectorial e cartesiana da recta que passa em A $(3,1,-4)$ e é:

22.1) Paralela à recta de equação $x+3=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{-\frac{1}{2}}$

22.2) Perpendicular aos vectores $\vec{u}(4,3,2)$ e $\vec{v}(1,2,0)$

23) Indique uma equação vectorial e as equações cartesianas dos três eixos coordenados.

24) Verifique se os planos $2x+3y-z+5=0$ e $x-y-z+8=0$ são perpendiculares e determine a recta de intersecção dos dois planos.

25) Resolva cada um dos seguintes sistemas e interprete geometricamente o resultado.

25.1) $\begin{cases} x-5y=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 5x-4y+3z=0 \end{cases}$

25.2) $x+y+z=7 \wedge x-y-2z=9 \wedge 2x+y-z=1$

25.3) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+3y+3z=0 \\ -2x+y-3z=0 \end{cases}$

25.4) $\begin{cases} 2x+2y+4z=2 \\ x+y+2z=1 \\ 3x+3y+6z=3 \end{cases}$

25.5) $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ -6x+3y-3z=-3 \\ x-y=0 \end{cases}$

25.6) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=3 \\ 3x+3y+3z=5 \end{cases}$

26) Considere a recta $r:\begin{cases} z=3x-1 \\ y=-2x+4 \end{cases}$

26.1) Determine a e b de modo que P $(a,2,b)$ pertença à recta.

26.2) Determine uma equação do plano perpendicular à recta r e que passa pelo ponto em que r intersecta o plano yoz.

SOLUÇÕES:

1. Definem.

2.1 $2x+5y-4z-21=0$

2.2 $2x+3y-4z-14=0$

2.3 $x-y-3z+7=0$

2.4 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+z-1=0$

2.5 $x-3y+14=0$

2.6 $x-2y+z-5=0$

2.7 $-3x+2y+2z+3=0$

2.8 $4y-3z-1=0$

2.9 $3y-2z=0$

2.10 $y=3$

3 $-3x+y+2z-4=0$

4

4.1 $(-1;-3;1)$

4.2 $(0;0;1)$

4.3 $\left(\frac{2\sqrt{273}}{21};\frac{8\sqrt{273}}{21};-\frac{10\sqrt{273}}{21}\right)$

5 Paralelos

7 n=7; m=3

8 $\left(\frac{3}{4};-\frac{13}{6};\frac{7}{12}\right)$

9 O produto escalar dos respectivos vectores normais é zero logo os planos são perpendiculares. Intersectam-se na reta: $\frac{x-3}{-4}=y=\frac{z-11}{-5}$

10 B=4; c=-2; d=-6

11

11.1 m=4

11.2 $m=-\frac{16}{3}$

12

12.1 (x,y,z)= $(-1;2;1)$+k$(1;-1;0)$,$k\in R$

12.2 35,3º

12.3 $x-y=-2$

12.4 x+y+z-2=0

12.5 t: $x+1=y-2=z-1$

13

13.1 $x=\frac{y-5}{2}=\frac{z+2}{3}$

13.2 $x=\frac{z+2}{3}\wedge y=5$

13.3 $y=5\wedge z=-2$

14

14.1 r: $\vec{d}=(2;-5;-3)$; $(1;-4;2)$; $(3;-9;-1)$

s: $\vec{d}=(1;0;2)$; $(0;4;-3)$; $(2;4;1)$

14.2 A não pertence e B pertence

14.3 $P_r(1+2k;-4-5k;2-3k)$;

$P_s(\alpha;4;-3+2\alpha)$

14.4

14.4.1 $\left(0;-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$

14.4.2 $(1;-4;2)$

14.4.3 $(3;-9;-1)$

14.5

14.5.1 $\left(\frac{3}{2};4;0\right)$

14.5.2 $(3;4;3)$

15

15.1 $\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{7}=\frac{z}{9}$

15.2 $\frac{x-9}{3}=y\wedge z=4$

15.3 $x=0\wedge y=-1$

15.4 $\frac{y}{4}=\frac{z}{-1}\wedge x=0$

16

16.1 $\vec{d}=\left(\frac{3}{2};3;5\right)$; S=$(0;1;1)$

16.2 $\vec{d}=\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{8}\right)$; S=$\left(3;-\frac{5}{2};\frac{5}{8}\right)$

16.3 $\vec{d}=(1;1;0)$; S=$(0;4;-3)$

16.4 $\vec{d}=\left(\frac{1}{2};0;1\right)$; S=$\left(\frac{3}{2};4;-4\right)$

16.5 $\vec{d}=(0;1;1)$; $S=(2;0;1)$

16.6 $\vec{d}=\left(\frac{19}{5};\frac{3}{5};1\right)$; $S=\left(-\frac{3}{5};-\frac{1}{5};0\right)$

17 $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

18

18.1 α=0

18.2 α=67,6º

18.3 α=21,8º

18.4 α=0

18.5 α=60º

20

20.1 Não complanares

20.2 Não complanares

20.3 Concorrentes em $\left(\frac{34}{9};\frac{23}{9};\frac{5}{9}\right)$

20.4 Concorrentes

21 a=-3

22

22.1 (x,y,z)= $(3;1;-4)+k\left(1;3;-\frac{1}{2}\right), k\in R$;

$x-3=\frac{y-1}{3}=\frac{z+4}{-\frac{1}{2}}$

22.2 (x,y,z)= $(3;1;-4)+k(-4;2;5), k\in R$;

$\frac{x-3}{-4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{5}$

23 Eixo das abcissas: (x,y,z)= $(2;0;0)+k(1;0;0), k\in R$; $y=0\wedge z=0$

Eixo das ordenadas: (x,y,z)= $(0;1;0)+k(0;1;0), k\in R$; $x=0\wedge z=0$

Eixo das cotas: (x,y,z)= $(0;0;3)+k(0;0;1), k\in R$; $x=0\wedge y=0$

24 Os planos são perpendiculares. Reta de intersecção: $\frac{x-3}{-4}=y=\frac{z-11}{-5}$

25

25.1 Sistema possível indeterminado. Interseção é uma reta: $\frac{x}{5}=y=\frac{z}{-7}$

25.2 Sistema possível determinado. Interseção é um ponto: $\left(\frac{38}{3};-15;\frac{28}{3}\right)$

25.3 Sistema possível indeterminado. Interseção é uma reta: $\frac{x}{-\frac{4}{3}}=\frac{y}{\frac{1}{3}}=z$

25.4 Sistema possível indeterminado. Interseção é o próprio plano

25.5 Sistema possível indeterminado (dois plano coincidentes e o 3º intersecta-os). Interseção é uma reta: $x=y=\frac{z-1}{-1}$

25.6 Impossível. Planos estritamente paralelos

26

26.1 a=1 e b=2

26.2 x-2y+3z+11=0

Ficha de Trabalho

- Programação Linear

Problema 1 :

Numa turma há 30 jovens: 20 raparigas e 10 rapazes.

A turma vai participar num concurso que admite duas modalidades de equipas.

Modalidade A : Equipas de dois elementos, um de cada sexo.

Prémio de participação : 50 €.

Modalidade B : Equipas de quatro elementos, três raparigas e um rapaz.

Prémio de participação : 60 €.

Como devem ser constituídas as equipas para a turma receber o valor máximo em prémios de participação, sabendo que cada um dos alunos não pode participar em mais do que uma equipa?

Problema 2 :

A companhia Madeira, Lda., fabrica dois tipos de móveis: mesas e cadeiras.

Uma mesa vende-se por 27 € e usa 10 € de materiais.

As cadeiras vendem-se por 21 € e cada uma requer 9 € de materiais.

Cada mesa construída aumenta os custos variáveis de trabalho e as despesas gerais em 14 €; cada cadeira produzida aumenta estes custos em 10 €.

A construção de mesas e cadeiras requer dois tipos de trabalho especializado: carpintaria e acabamentos.

A produção de uma mesa requer 2 horas de acabamentos e 1 hora de carpintaria; uma cadeira requer 1 hora de acabamentos e 1 hora de carpintaria.

Em cada semana de trabalho, a empresa Madeira, Lda. pode obter todas as matérias-primas que forem necessárias, mas tem disponíveis apenas 100 horas de mão de obra para acabamentos e, 80 horas de mão de obra de carpintaria.

A procura de cadeiras é ilimitada, mas a venda de mesas é de, no máximo 40 unidades por semana.

O que é que a empresa deve fazer para maximizar o lucro semanal?

Problema 3:

Uma empresa fabrica dois tipos de mesas: tipo J para sala de jantar e tipo C para cozinha.

Utiliza 3 máquinas:

- Uma serra mecânica – s
- Uma rebarbadora – r
- Uma prensa – p

As condições para a cadeia de produção são as seguintes: o fabrico de uma mesa J gasta 1 hora de trabalho com a serra, 1 hora com a rebarbadora e 3 horas com a prensa; enquanto que para fabricar uma mesa do tipo C é preciso 1 hora de serra, 2 horas de rebarbadora e 1 hora de prensa. E sabe-se que, no período interessante de produção, as máquinas vão estar disponíveis para o fabrico das mesas exactamente 60 horas de serra, 90 horas de rebarbadora e 150 horas de prensa.

Sabendo que cada mesa J se pode vender a 200 € e que cada mesa do tipo C a 100 €, interessa determinar o que deve ser produzido para tirar o máximo benefício deste tipo de mesas.

Problema 4:

Uma fábrica de confecções produz dois tipos de fatos: modelo A e modelo B. O modelo A leva 3 horas no fabrico e 1 hora nos acabamentos. O modelo B leva 2 horas no fabrico e 2 horas nos acabamentos.

Para o fabrico, a empresa dispõe no máximo de 480 horas por dia e para o acabamento 300 horas diárias.

Sabe-se ainda que o lucro resultante de produzir um fato modelo A é de 30 euros e o lucro de produzir um fato do modelo B é de 50 euros.

Quantos fatos de cada modelo deve produzir por dia para obter um lucro máximo? Qual é o lucro máximo diário?

Problema 5:

Uma fábrica de bombons produz dois tipos de caixa: a de tipo A que contém 1 kg de chocolate e 2kg de avelãs; a de tipo B que contém 1,5 kg de chocolate e 1,5 kg de avelãs.

Sabe-se que dispõe de 150 kg de chocolate e 225 kg de avelãs e que o preço de cada caixa do tipo A é 60 euros e de cada caixa do tipo B é 70 euros.

Quantas caixas de cada tipo deve fabricar, de forma que a receita da sua venda seja máxima?

Problema 6:

Um intermediário vai ao Ribatejo comprar melões e melancias para vender em pequenas lojas espalhadas pelo Norte.

Cada caixa de melões custa 50 euros e cada caixa de melancias custa 30 euros.

O comerciante dispõe de 600 euros para investir e apenas tem espaço na carrinha para 14 caixas.

Quantas caixas deve comprar de cada tipo para obter o lucro máximo, sabendo que ganha, em cada caixa, 20% do preço do custo?

Problema 7:

Uma companhia de teatro necessita de comprar para o seu guarda-roupa, no mínimo 15 lenços e 27 fitas de cabelo.

No mercado encontram-se dois tipos de caixas: as do tipo A que contêm 1 lenço e 5 fitas de cabelo e custam 10 euros; as do B que contêm 5 lenços e uma fita de cabelo e custam 30 euros.

Qual é a despesa mínima que podem fazer?

Problema 8:

Um comboio de mercadorias pode comportar, no máximo, 20 carruagens. Numa certa viagem transporta madeiras e blocos de granito.

Os blocos de pedra devem ocupar pelo menos 9 carruagens e a madeira ocupará, pelo menos, um número de carruagens igual a um terço do número de carruagens ocupadas com os blocos de pedra.

Sabendo que cada carruagem carregada de pedra rende à companhia 2500 euros e cada carruagem carregada de madeira rende 1500 euros, calcule como devem ser distribuídas as carruagens de maneira a que a companhia obtenha o lucro máximo.

Problema 9:

No mercado estão disponíveis dois medicamentos:

Medicamento A em que uma unidade custa 5 euros e é formada por 1 unidade de fibras, 1 unidade de proteínas e 3 unidades de vitaminas.

Medicamento B em que uma unidade custa 8 euros e é formada, respectivamente, por 4, 1 e 1 unidades das referidas componentes.

Um doente necessita, por dia, no mínimo de 7 unidades de fibras, 4 unidades de proteínas e 8 unidades de vitaminas.

Nestas condições, determine quantas unidades de cada um dos medicamentos devem ser utilizadas de modo a minimizar o custo do tratamento.

Problema 10:

O Rui está a planear as suas férias do próximo Verão. Quer passar uns dias na praia e outros na serra do Gerês.

Na serra não quer estar mais do que seis dias e o número de dias na praia não deve ser inferior ao tempo de estadia no Gerês.

Como qualquer jovem, está condicionado pela sua fraca capacidade económica: dispõe apenas de 80 euros para dormidas e sabe que, na praia, vai ficar num albergue para jovens que cobra 8 euros por noite, enquanto, no Gerês, cada dormida no parque de campismo só custa 4 euros.

Entretanto estabeleceu que quer estar fora, no mínimo, 8 dias.

Qual o número máximo de dias que o Rui pode sair e como se distribuem entre a praia e a serra?

Problema 11:

Para um desfile de Carnaval, uma turma do 11º ano conseguiu que uma fábrica lhe disponibilizasse 16 metros de tecido com bolas, 11 metros de tule e 15 metros de cetim.

Uma modista propôs-lhes a confecção de dois tipos de fatos que vamos chamar A e B.

Um fato do tipo A gasta 2 metros de tecido com bolas, um metro de tule e um metro de cetim.

Um fato do tipo B gasta 1 metro de tecido com bolas, 2 metros de tule e 3 metros de cetim.

Qual o número máximo de fatos que podem ser confeccionados? E quantos são do tipo A?

<u>SOLUÇÕES</u>:
1. 5 equipas na modalidade A e 5 equipas na modalidade B.
2. 20 mesas e 60 cadeiras.
3. 45 mesas do tipo J e 15 mesas do tipo C.
4. 90 fatos do modelo A e 105 do modelo B. 7950 euros.
5. 75 caixas do tipo A e 50 do tipo B.
6. A solução óptima é múltipla, portanto deve comprar, por exemplo, 9 caixas de melões e 5 caixas de melancias.
7. 110 euros.
8. 15 carruagens devem levar pedra e 5 carruagens devem levar madeira.
9. 3 unidades de A e 1 unidade de B.
10. 13 dias, 7 na praia e 6 na serra.
11. 9 fatos, 7 do tipo A.

Ficha de Trabalho

- Revisão de Funções

Problema 1 :

Num laboratório, foi colocado um purificador de ar.

Num determinado dia, o purificador foi ligado às zero horas e desligado algum tempo depois.

Ao longo desse dia, o nível de poluição do ar diminuiu, enquanto o purificador esteve ligado.

Uma vez desligado, o nível de poluição do ar começou de imediato a aumentar.

Admite que o nível de poluição do ar no laboratório, medido em mg/l de ar, às t horas desse dia, pode ser dado por

$P(t) = 0{,}002t^2 - 0{,}05t + 1, \quad t \in [0;24]$

Utiliza a calculadora para responder às questões que se seguem.

a) Qual o nível de poluição às duas horas e trinta minutos da tarde?

b) Quanto tempo esteve o purificador ligado? Apresenta o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades)

c) Para a realização de duas experiências A e B é exigido que o nível de poluição do ar seja inferior a 0,7 mg/l de ar.

O tempo necessário à realização das experiências A e B é, respectivamente, seis horas e quatro horas e trinta minutos. É possível realizar estas experiências?

Utiliza a calculadora para investigar esta questão. Numa pequena composição, explica as conclusões a que chegaste, justificando-as devidamente. Inclui, na tua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas).

Problema 2 :

Numa escola, em 1994, um grupo de alunos sensibilizados para os problemas ambientais aproveitou o Dia Mundial do Ambiente, 5 de Junho, e constituiu um Clube do Ambiente. O número de elementos do clube foi variando e ajusta-se ao seguinte modelo matemático:

$N(t) = -t^3 + 5t^2 + 22t + 16$

t – número de elementos decorridos após a fundação do clube.

Estuda o modelo matemático apresentado, recorrendo à representação gráfica, e responde:

(Nota: Todas as respostas baseadas em procedimentos gráficos, devem ser acompanhados de um ou mais gráficos que suportem os raciocínios)

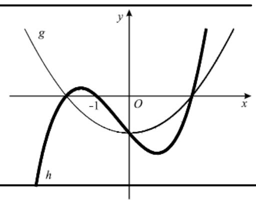
a) Quantos elementos fundaram o clube?

b) Em que ano foi (ou é) extinto o clube, por falta de elementos participantes?

c) Em que ano o clube teve mais participantes?

Ficha de Trabalho nº 10

- Operações com funções



• As **operações com funções** podem ser sintetizadas no seguinte quadro:

	Notação	Domínio	Função definida por
Produto por um número real α	$\alpha.f$	D_f	$(\alpha.f)(x) = \alpha.f(x)$
Soma	f + g	$D_f \cap D_g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Diferença	f – g	$D_f \cap D_g$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
Produto	f × g	$D_f \cap D_g$	$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
Quociente	$\frac{f}{g}$	$D_f \cap D_g \cap \{x: g(x) \neq 0\}$ $D_f \cap D_g \setminus \{x: g(x)=0\}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

• Sejam as funções f: A $\to$ B e g: C $\to$ E. A **função composta** de f e g, designada por $f \circ g$ (lê-se f após g) é a função definida do seguinte modo:

→ O domínio de $f \circ g$ é D = $\{x: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

→ Tem por conjunto de chegada o de f.

→ Para cada $x \in D$, $f \circ g(x) = f\left(g(x)\right)$.

• A **composição de funções é associativa**, mas **não é comutativa**.

Se $f \circ g = g \circ f$ as funções dizem-se **permutáveis**.

Exercícios

1. Considera as funções reais de variável real tais que:

$$f(x) = x^2 + 5 \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1}{2x-1}$$

1.1. Averigua se f é par.

1.2. Indica D_f, D_g e D_{f+g}.

1.3. Caracteriza as funções:

1.3.1. f + g

1.3.2. f − g

2. Sejam h e j as funções reais de variável real tal que:

$$h(x) = \frac{5}{x} \qquad \text{e} \qquad j(x) = \frac{x^2-9}{x+2}$$

2.1. Averigua se h é ímpar.

2.2. Caracteriza as funções:

2.2.1. $h \times j$ **2.2.2.** $\dfrac{h}{j}$

3. As funções i e j são reais de variável real definidas pelas seguintes expressões:

$$i(x) = \frac{2x^2 - 6}{x - 1} \quad \text{e} \quad j(x) = \frac{8x}{x^2 - 1}$$

3.1. Caracteriza a função i + j.

3.2. Determina sob a forma de intervalos o conjunto solução de $(i + j)(x) < 0$.

4. Dadas as funções: $m(x) = 2x - 4$ e $p(x) = \dfrac{1}{x-3}$ reais de variável real.

4.1. Caracteriza **m – p**.

4.2. Determina os zeros da função **m – p**.

4.3. Escreve, recorrendo a intervalos de números reais, o conjunto de valores de **x** para os quais **m – p** não é negativa.

5. Sejam f e g as funções:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & se \;\; x \geq 0 \\ x & se \;\; x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 3x & se \;\; x \geq 0 \\ 8x + 1 & se \;\; x < 0 \end{cases}$$

5.1. Determina:

5.1.1. os zeros de g.

5.1.2. o intervalo de números reais onde $f(x) < 0$.

5.2. Caracteriza a função $\dfrac{f}{g}$.

6. São dadas as funções reais de variável real

$$f(x) = -1 + 2\cos^2 x \qquad g(x) = \frac{1-x}{1+x} \qquad h(x) = \operatorname{tg}^2 x$$

6.1. Determina o contradomínio de f.

6.2. Representa em extensão o conjunto $\mathbf{A = \{x: \; x \in [-\pi, \pi] \;\wedge\; f(x) = 0\}}$

6.3. Determina o domínio de **g o f**.

6.4. Mostra que **(g o f)(x) = h(x)** , $\forall x \in D_{g\,o\,f}$.

7. Considera as funções reais de variável real

$$m(x) = \frac{2}{x+2} \quad \text{e} \quad p(x) = 1 - 2x$$

7.1. Calcula (m o p) (1) e (p o m) (0).

7.2. Caracteriza as funções (m o p) e (p o m).

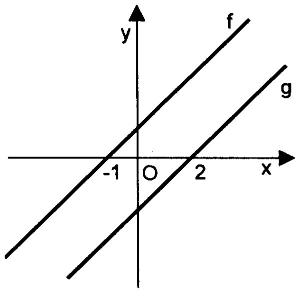
8. Sendo f e g duas funções reais de variável real definidas por

$$f(x) = \sqrt{x-4} \quad \text{e} \quad g(x) = 3 + x^2$$

8.1. Determina o domínio das funções f e g.

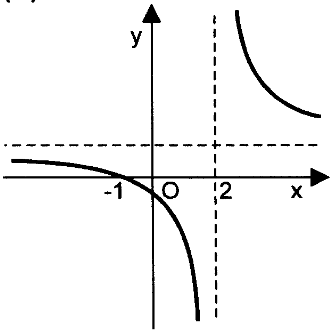
8.2. Mostra que f o g tem dois zeros e que g o f não tem zeros.

9. Na figura estão representadas graficamente duas funções: **f** e **g**.

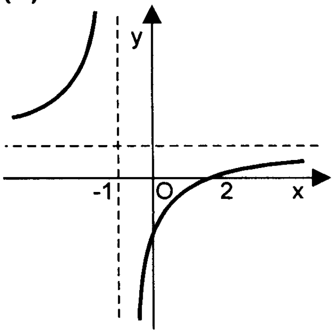


Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da função $\dfrac{f}{g}$?

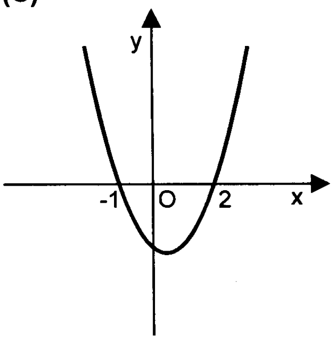
(A)



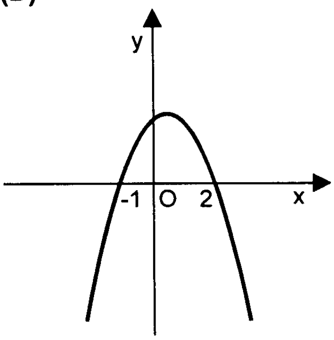
(B)



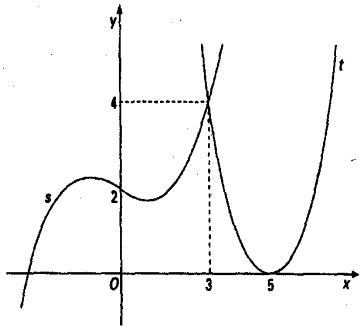
(C)



(D)



10. Na figura estão representadas graficamente as funções **s** e **t**. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?



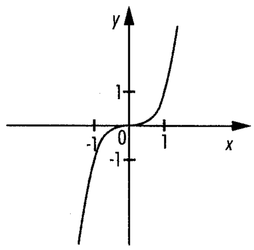
(A) A função **t** não tem zeros.

(B) 2 é um zero da função **s**.

(C) 5 é um zero da função $\dfrac{s}{t}$.

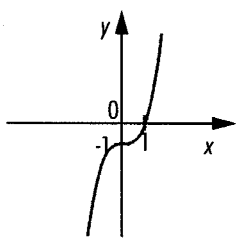
(D) 3 é um zero da função **s – t**.

11. Seja **f** a função real de variável real, definida graficamente por:

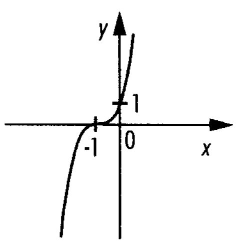


A representação gráfica da função definida por **f(x+1)** é:

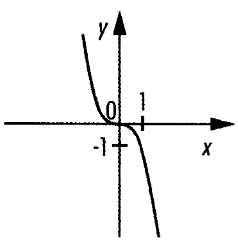
(A)



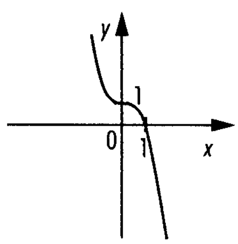
(B)



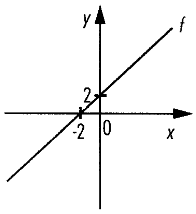
(C)

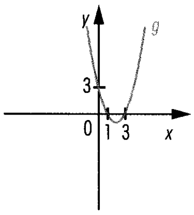


(D)



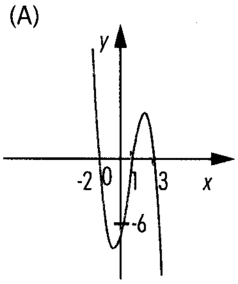
12. Sejam as funções **f** e **g**, de domínio ℝ, representadas graficamente por:



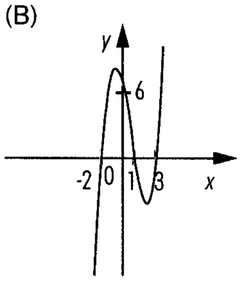


A representação gráfica de **f** × **g** é:

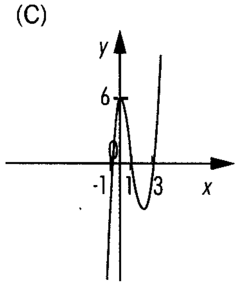
(A)



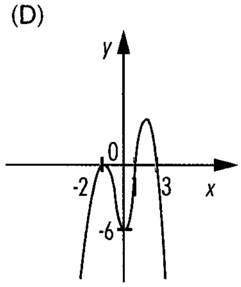
(B)



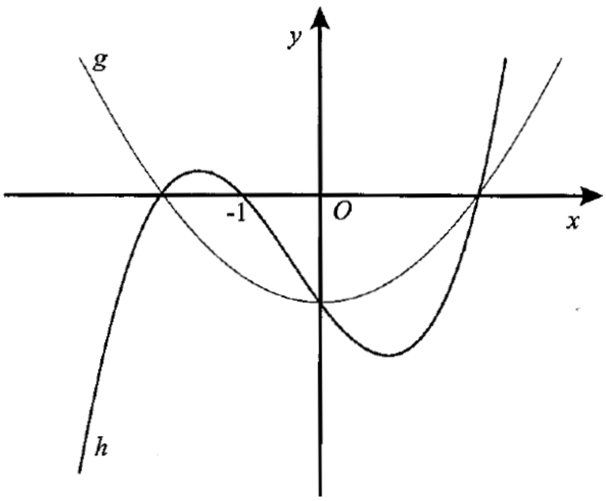
(C)



(D)



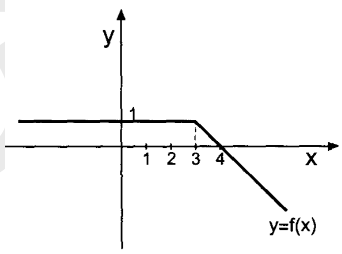
13. Na figura estão representadas partes dos gráficos de duas funções polinomiais, g e h, ambas de domínio ℝ.

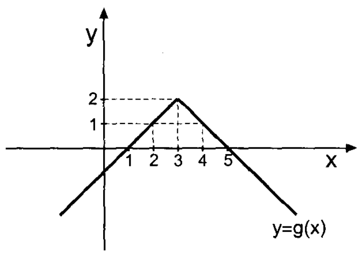


Qual das expressões seguintes pode definir uma função f, de domínio ℝ, tal que $f \times g = h$.

(A) $x-1$ **(B)** $-x+1$ **(C)** $x+1$ **(D)** $-x-1$

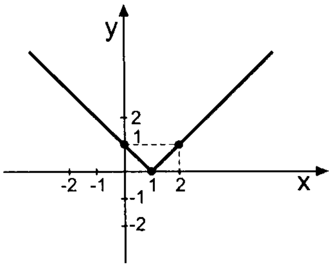
14. Sejam as funções **f** e **g**, de domínio ℝ, representadas graficamente por:



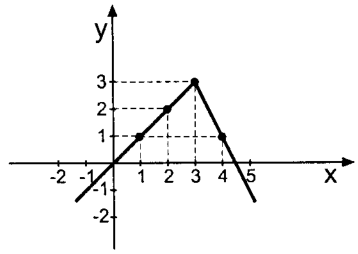


O gráfico da função **(f + g)** é:

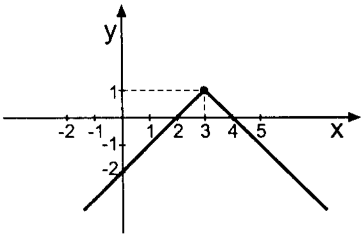
(A)



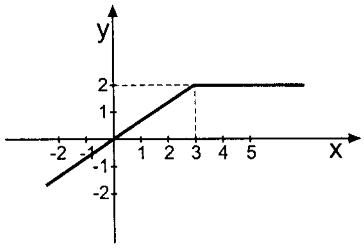
(C)



(B)



(D)



15. As figuras 1 e 2 são gráficos de funções **f** , **g** : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, respectivamente.

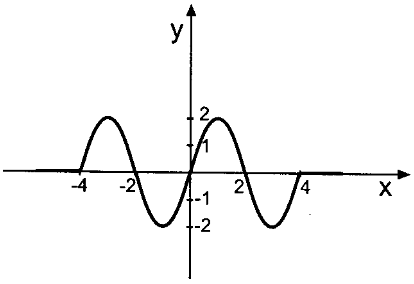


Figura 1

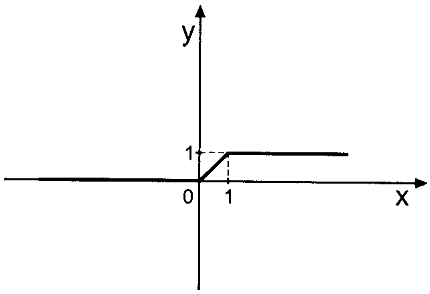
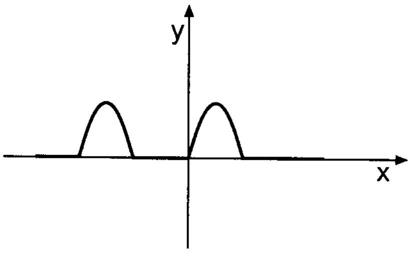


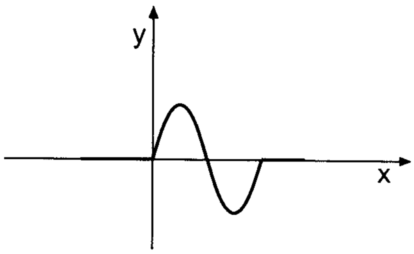
Figura 2

Qual dos gráficos seguintes pode ser o gráfico da função composta **gof** :

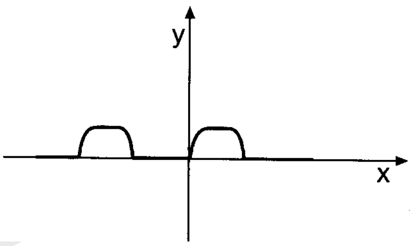
(A)



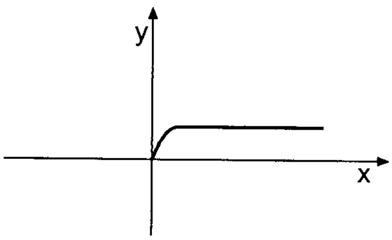
(B)



(C)



(D)



SOLUÇÕES:

1.1. Sim

1.2. $D_f = \mathbb{R}$; $D_g = D_{f+g} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

1.3.1. $f + g : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$

$x \to \dfrac{2x^3 - x^2 + 10x - 4}{2x - 1}$

1.3.2. $f - g : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$

$x \to \dfrac{2x^3 - x^2 + 10x - 6}{2x - 1}$

2.1. Sim

2.2.1. $h \times j : \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\} \to \mathbb{R}$

$x \to \dfrac{5x^2 - 45}{x^2 + 2x}$

2.2.2. $\dfrac{h}{j} : \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0, 3\} \to \mathbb{R}$

$x \to \dfrac{5x + 10}{x^3 - 9x}$

3.1. $i + j : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$

$x \to \dfrac{2x^2 + 4x + 6}{x + 1}$

3.2. $]-\infty, -1[$

4.1. $m - p : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$

$x \to \dfrac{2x^2 - 10x + 11}{x - 3}$

4.2. $x = \dfrac{5 - \sqrt{3}}{2} \vee x = \dfrac{5 + \sqrt{3}}{2}$

4.3. $\left[\dfrac{5 - \sqrt{3}}{2}; 3\right[\cup \left[\dfrac{5 + \sqrt{3}}{2}; +\infty\right[$

5.1.1. $x = 0$ e $x = -\dfrac{1}{8}$

5.1.2. $]-\infty, 1[$

5.2. $\dfrac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{8}, 0\} \to \mathbb{R}$

$$x \to \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{3x} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{x}{8x + 1} & \text{se } x < 0 \wedge x \neq -\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

6.1. $[-1, 1]$

6.2. $A = \left\{-\dfrac{3}{4}\pi, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{4}\pi\right\}$

6.3. $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$

7.1. $(m \circ p)(1) = 2$ e $(p \circ m)(0) = -1$

7.2. $m \circ p : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\} \to \mathbb{R}$

$x \to \dfrac{2}{3 - 2x}$

$p \circ m : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$

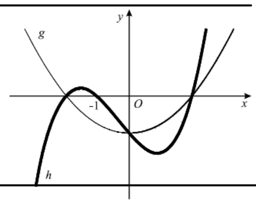
$x \to \dfrac{x - 2}{x + 2}$

8.1. $D_f = [4, +\infty[$; $D_g = \mathbb{R}$

8.2. Zeros de $f \circ g$ $\{-1, 1\}$; $1 \notin D_{g \circ f}$

9. (A) **10.** (D) **11.** (B) **12.** (B) **13.** (C) **14.** (C) **15.** (C)

Ficha de Trabalho



- Operações com funções

1) Considere as funções h e j tais que $h(x)=\dfrac{2x-2}{x}$ e $j(x)=x^2$

1.1) Calcule:

1.1.1) $(h \times j)(-1)$

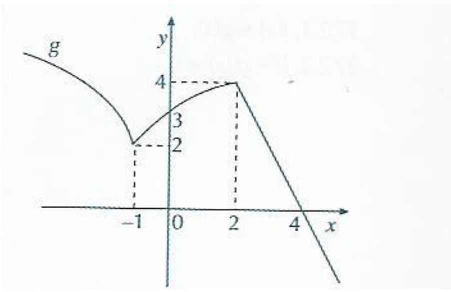
1.1.2) $\left(\dfrac{h}{j}\right)(3)$

1.2) Determine o domínio de:

1.2.1) $h-j$

1.2.2) $\dfrac{j}{h}$

2) Considere a função f tal que $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e a função g de domínio IR que se encontra representada graficamente por



Calcule:

2.1) $(f+g)(-1)$

2.2) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(2)$

2.3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(0)$

3) Considere as funções f e g definidas por $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ \dfrac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$ e $g(x)=|x-1|$.

Caracterize, sem utilizar o símbolo de módulo, as funções:

3.1) $f+g$

3.2) $f \times g$

3.3) $\dfrac{f}{g}$

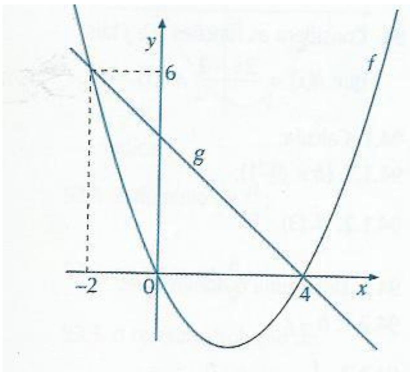
4) Duas funções f e g de domínio IR estão representadas graficamente no referencial da figura.

4.1) Determine o domínio das funções:

4.1.1) $f \times g$

4.1.2) $\frac{f}{g}$

4.1.3) $\frac{g}{f}$

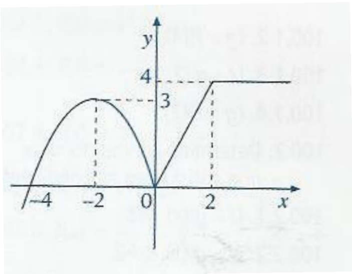


4.2) Indique o conjunto solução da condição:

4.2.1) $f(x) \leq g(x)$

4.2.2) $(f - g)(x) = 0$

5) Considere a função g tal que $g(x) = \frac{1}{x}$ e a função f representada graficamente na figura seguinte:



Calcule:

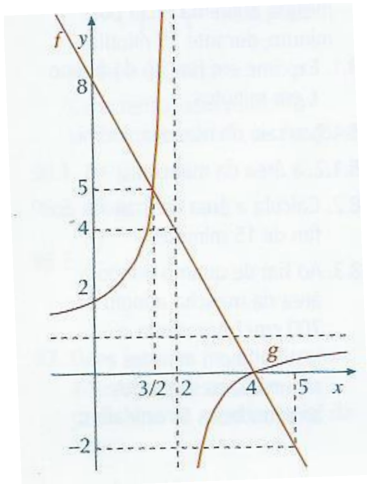
5.1) $g[f(2)]$

5.2) $f\left[g\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

5.3) $f[-f(2)]$

5.4) $f[g(0{,}01)]$

6) Considere as funções f e g representadas graficamente por uma recta e uma hipérbole, respectivamente.



6.1) Com base nos dados da figura, indique, caso exista, o valor de:

6.1.1) $(f \circ g)\left(\frac{3}{2}\right)$

6.1.2) $(g \circ f)(4)$

6.1.3) $(f \circ g)(2)$

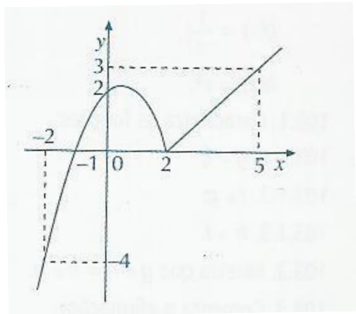
6.1.4) $(g \circ f)(2)$

6.2) Determine os valores de x que satisfazem as condições:

6.2.1) $(f \circ g)(x) = 8$

6.2.2) $(f \circ g)(x) \langle 2$

7) Considere a função f definida por $f(x) = x^2 + 1$ e a função g cuja representação gráfica é:



Calcule:

7.1) $(g \circ f)(1)$

7.2) $(f \circ g)(5)$

7.3) $(g \circ g)(2)$

7.4) $g[-f(-1)]$

8. Considera as funções reais de variável real tais que:

$$f(x) = x^2 + 5 \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1}{2x-1}$$

8.1. Averigua se f é par.

8.2. Indica D_f, D_g e D_{f+g}.

8.3. Caracteriza as funções:

8.3.1. $f + g$

8.3.2. $f - g$

9. Sejam h e j as funções reais de variável real tal que:

$$h(x) = \frac{5}{x} \qquad \text{e} \qquad j(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 2}$$

9.1. Averigua se h é ímpar.

9.2. Caracteriza as funções:

9.2.1. $h \times j$

9.2.2. $\frac{h}{j}$

10. As funções i e j são reais de variável real definidas pelas seguintes expressões:

$$i(x) = \frac{2x^2 - 6}{x - 1} \qquad \text{e} \qquad j(x) = \frac{8x}{x^2 - 1}$$

10.1. Caracteriza a função $i + j$.

10.2. Determina sob a forma de intervalos o conjunto solução de $(i + j)(x) < 0$.

11. Dadas as funções: $m(x) = 2x - 4$ e $p(x) = \frac{1}{x-3}$ reais de variável real.

11.1. Caracteriza $m - p$.

11.2. Determina os zeros da função $m - p$.

11.3. Escreve, recorrendo a intervalos de números reais, o conjunto de valores de x para os quais $m - p$ não é negativa.

12. Sejam f e g as funções:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \geq 0 \\ 8x + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

12.1. Determina:

12.1.1. os zeros de g.

12.1.2. o intervalo de números reais onde $f(x) < 0$.

12.2. Caracteriza a função $\dfrac{f}{g}$.

13. São dadas as funções reais de variável real

$$f(x) = -1 + 2\cos^2 x \qquad g(x) = \frac{1-x}{1+x} \qquad h(x) = \mathrm{tg}^2\, x$$

13.1. Determina o contradomínio de f.

13.2. Representa em extensão o conjunto $A = \{x: x \in [-\pi, \pi] \wedge f(x) = 0\}$

13.3. Determina o domínio de $g \circ f$.

13.4. Mostra que $(g \circ f)(x) = h(x)$, $\forall x \in D_{g \circ f}$.

14. Considera as funções reais de variável real

$$m(x) = \frac{2}{x+2} \qquad \text{e} \qquad p(x) = 1 - 2x$$

14.1. Calcula $(m \circ p)(1)$ e $(p \circ m)(0)$.

14.2. Caracteriza as funções $(m \circ p)$ e $(p \circ m)$.

15. Sendo f e g duas funções reais de variável real definidas por

$$f(x) = \sqrt{x-4} \qquad \text{e} \qquad g(x) = 3 + x^2$$

15.1. Determina o domínio das funções f e g.

15.2. Mostra que $f \circ g$ tem dois zeros e que $g \circ f$ não tem zeros.

16. Na figura estão representadas graficamente as funções s e t.

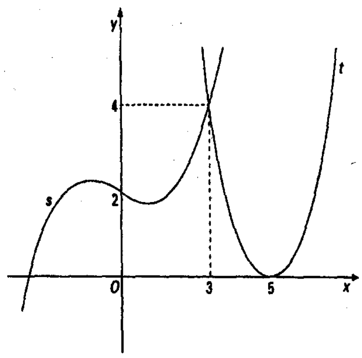
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função t não tem zeros.

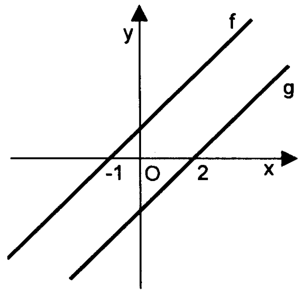
(B) 2 é um zero da função s.

(C) 5 é um zero da função $\dfrac{s}{t}$.

(D) 3 é um zero da função $s - t$.

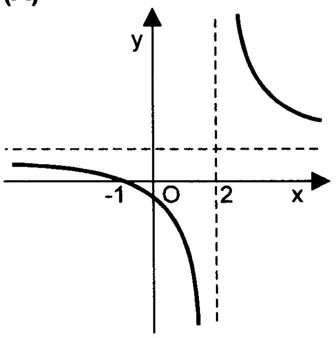


17. Na figura estão representadas graficamente duas funções: f e g.

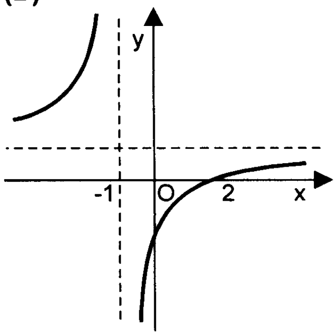


Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da função $\frac{f}{g}$?

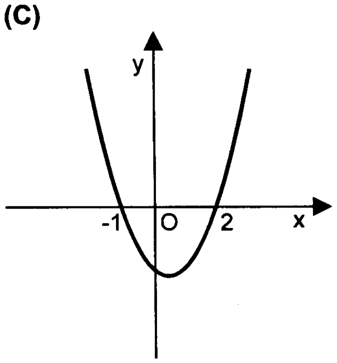
(A)



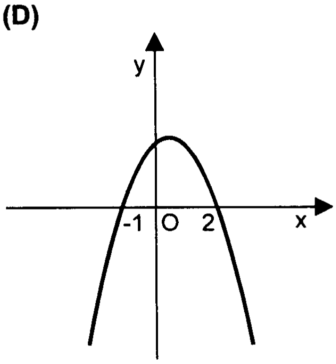
(B)



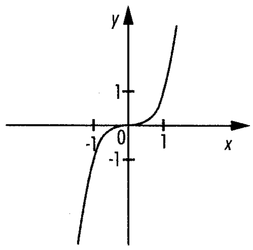
(C)



(D)

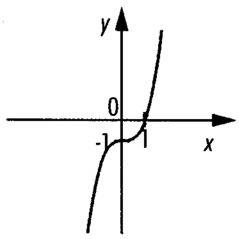


18. Seja f a função real de variável real, definida graficamente por:

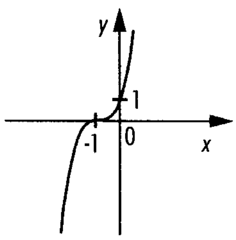


A representação gráfica da função definida por f(x+1) é:

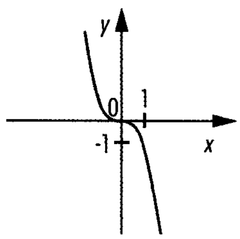
(A)



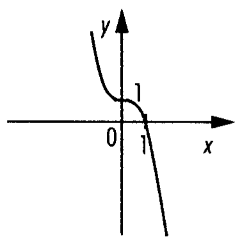
(B)



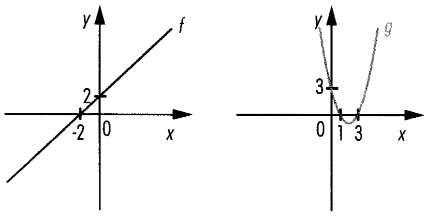
(C)



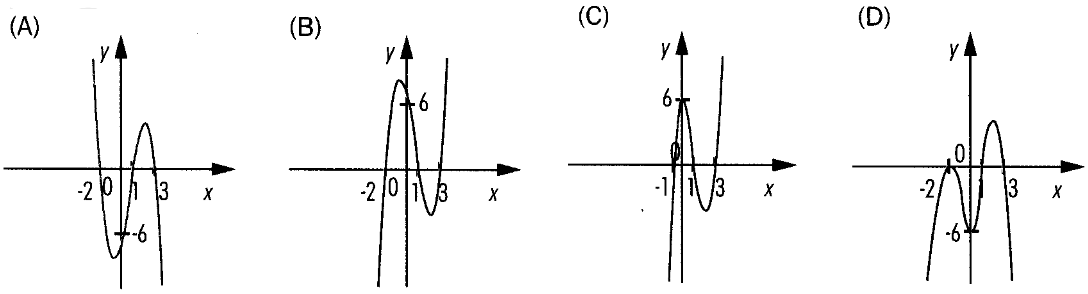
(D)



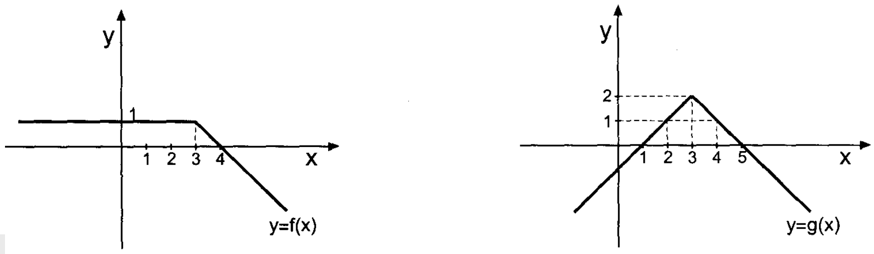
19. Sejam as funções f e g, de domínio IR, representadas graficamente por:



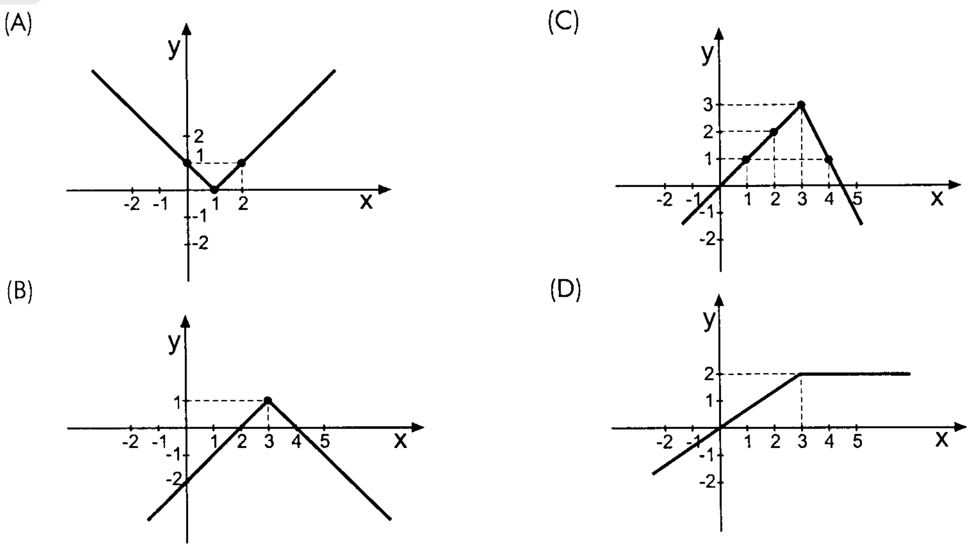
A representação gráfica de f × g é:



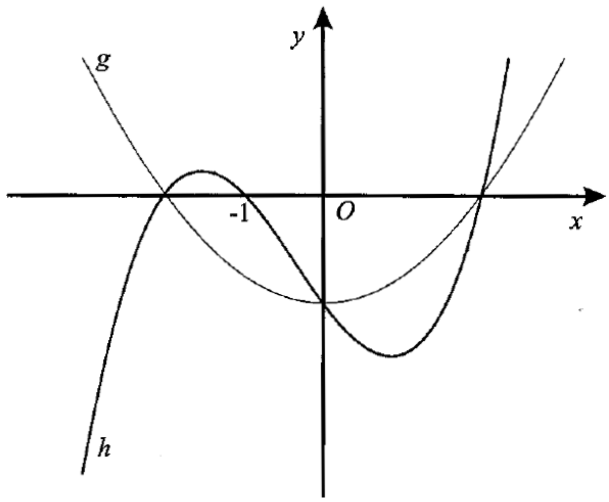
20. Sejam as funções f e g, de domínio IR, representadas graficamente por:



O gráfico da função (f + g) é:



21. Na figura estão representadas partes dos gráficos de duas funções polinomiais, g e h, ambas de domínio IR.



Qual das expressões seguintes pode definir uma função f, de domínio IR, tal que f x g =h.

(A) x - 1 (B) –x + 1 (C) x + 1 (D) -x - 1

22. As figuras 1 e 2 são gráficos de funções f , g : IR → IR, respectivamente.

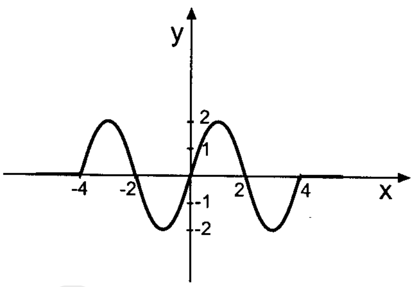


Figura 1

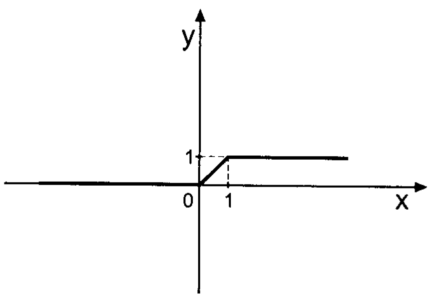
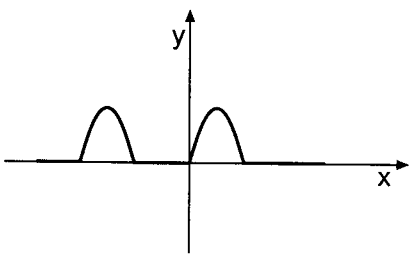


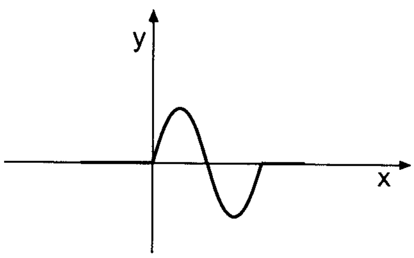
Figura 2

Qual dos gráficos seguintes pode ser o gráfico da função composta gof :

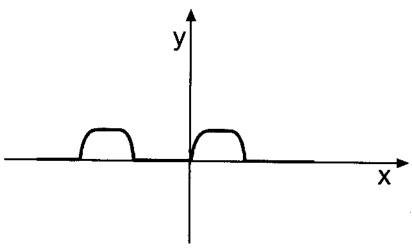
(A)



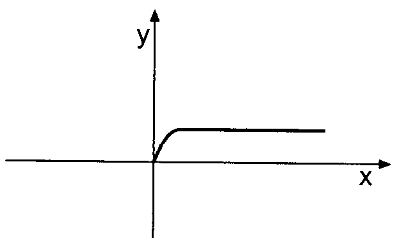
(B)



(C)



(D)



Soluções:

1.1.1) 4   1.1.2) $\frac{27}{4}$

1.2.1) $IR \setminus \{0\}$ 1.2.2) $IR \setminus \{0,1\}$

2.1) $\frac{5}{2}$ 2.2) 4   2.3) $-\frac{1}{3}$

3.1) $f+g: IR \to IR$ tal que $(f+g)(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \geq 1 \\ \dfrac{-x^2+2x+2}{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$

3.2) $f \times g: IR \to IR$ tal que $(f \times g)(x) = \begin{cases} 2x^2 - x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

3.3) $\frac{f}{g}: IR \setminus \{1\} \to IR$ tal que $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-1} & \text{se } x > 1 \\ -\dfrac{3}{(x-1)^2} & \text{se } x < 1 \end{cases}$

4.1.1) IR 4.1.2) $IR \setminus \{4\}$ 4.1.3) $IR \setminus \{0, 4\}$

4.2.1) $[-2, 4]$ 4.2.2) $\{-2, 4\}$

5.1) $\frac{1}{4}$ 5.2) 3   5.3) 0   5.4) 4

6.1.1) -2 6.2.1) $x = 4$ 6.1.2) 2   6.2.2) $x \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$

6.1.3) Não existe   6.1.4) 0

7.1) 0   7.2) 10   7.3) 2   7.4) -4

8.1. Sim   8.2. $D_f = IR$; $D_g = D_{f+g} = IR \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

8.3.1. $f + g : IR \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \to IR$

$$x \to \frac{2x^3 - x^2 + 10x - 4}{2x-1}$$

8.3.2. $f - g : IR \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \to IR$

$$x \to \frac{2x^3 - x^2 + 10x - 6}{2x-1}$$

9.1. Sim

9.2.1. $h \times j : IR \setminus \{-2, 0\} \to IR$

$$x \to \frac{5x^2 - 45}{x^2 + 2x}$$

9.2.2. $\frac{h}{j} : IR \setminus \{-3, -2, 0, 3\} \to IR$

$$x \to \frac{5x + 10}{x^3 - 9x}$$

10.1. $i + j : IR \setminus \{-1, 1\} \to IR$

$$x \to \frac{2x^2 + 4x + 6}{x+1}$$

10.2. $]-\infty, -1[$

11.1. $m - p : IR \setminus \{3\} \to IR$

$$x \to \frac{2x^2 - 10x + 11}{x-3}$$

11.2. $x = \frac{5-\sqrt{3}}{2} \vee x = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$ 11.3. $\left[\frac{5-\sqrt{3}}{2}; 3\right[\cup \left[\frac{5+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[$

12.1.1. $x = 0$ e $x = -\frac{1}{8}$ 12.1.2. $]-\infty, 1[$

12.2. $\dfrac{f}{g}: IR \setminus \{-\dfrac{1}{8}, 0\} \to IR$

$$x \to \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{3x} & \text{se } x>0 \\ \dfrac{x}{8x+1} & \text{se } x<0 \wedge x \neq -\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

13.1. $[-1, 1]$

13.2. $A = \left\{-\dfrac{3}{4}\pi, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{4}\pi\right\}$

13.3. $D_{g_o f} = IR \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in IR$

14.1. $(m \circ p)(1) = 2$ e $(p \circ m)(0) = -1$

14.2. $m \circ p : IR \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\} \to IR$

$$x \to \frac{2}{3-2x}$$

$p \circ m : IR\setminus\{-2\} \to IR$

$$x \to \frac{x-2}{x+2}$$

15.1. $D_f = [4, +\infty[$; $D_g = IR$

15.2. Zeros de $f \circ g$ $\{-1, 1\}$; $1 \notin D_{g_o f}$

16. (D) 17. (A) 18. (B) 19. (B) 20. (C) 21. (C) 22. (C)

Ficha de Trabalho

- Equações e inequações racionais. Problemas

1) Simplifique cada uma das fracções e indique o conjunto em que a simplificação é válida:

a) $\dfrac{x^2}{x^2+x}$ b) $\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$ c) $\dfrac{3x^3}{5x^6}$ d) $\dfrac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}$ e) $\dfrac{1-x^4}{x^2-1}$ f) $\dfrac{x^3-x}{1-x^4}$

g) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$ h) $\dfrac{x^2-6x+5}{25-x^2}$ i) $\dfrac{(3x-2)^2-(3x-2)}{3x^2-3x}$ j) $\dfrac{2x^3+9x^2+x-12}{x^2-1}$

l) $\dfrac{x^2-4}{x^3-4x^2+x+6}$ m) $\dfrac{2x^3-x^2+x-2}{2x^2+x-3}$ n) $\dfrac{x^5-1}{x^2-1}$ o) $\dfrac{x^5-x^2}{x^4+x^3+x^2}$

2) Efectue as operações e simplifique os resultados:

a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{x^2-x}$ b) $\dfrac{5}{1-x}+\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{3x}{x^2-1}$ c) $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-2}{3-x}+\dfrac{9}{x^2-9}$

d) $\dfrac{x^2-3x}{x^3+x^2-12x}-\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{2}{x-3}$ e) $\dfrac{x+2}{x^2-4}\times\dfrac{x-2}{x}$ f) $\dfrac{5x+10}{x^2-1}\div\dfrac{3x+6}{x+1}$

g) $\dfrac{x^2-x-6}{1-x}\div\left(1-\dfrac{3}{x}\right)$ h) $\left(\dfrac{x-1}{3-x}\right)^2\times\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)^3$ i) $\dfrac{3x^2}{x-3}\div\dfrac{x^2-x}{9-x^2}$

j) $(x-1)\left(\dfrac{x+1}{x^2-1}+x-1\right)$ l) $\dfrac{x^2-4}{x^3-4x^2+x+6}$ m) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x}\div\dfrac{x-1}{3x}$

3) Resolva, em IR, as equações:

a) $\dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3}=0$ b) $\dfrac{x^2-8x+7}{x-1}=0$ c) $\dfrac{6}{x-1}=0$

d) $\dfrac{3+x}{2-x}=5$ e) $\dfrac{1}{x+2}=2$ f) $\dfrac{4}{x-3}-2=\dfrac{3}{x}$

g) $\dfrac{x-1}{x+1}=x-1$ h) $\dfrac{6x}{x^2-9}+\dfrac{x}{3-x}=\dfrac{x}{x+3}$ i) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1-2x}{6-3x}=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

4) Resolva, em IR, as seguintes inequações:

a) $\dfrac{2x-3}{x-2}-4<-\dfrac{3}{x-2}$ b) $\dfrac{x+1}{x+3}<2$ c) $1+\dfrac{1}{x}<2x$ d) $\dfrac{x^2+x-6}{x-1}<0$

e) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}>0$ f) $\dfrac{1}{x}>x$ g) $\dfrac{x^2-4}{x^2+9x}<0$ h) $\dfrac{3}{x-2}<0$

i) $\frac{-5}{7x-6} > 0$ j) $\frac{x^2+2}{1-x} \leq 0$ l) $\frac{x^2+5}{2-3x} < 0$ m) $\frac{-x^2-3}{1-x} < 0$

n) $\frac{(x-25)^2}{x^2+25} > 0$ o) $\frac{x^2-9}{(x-5)^2} \geq 0$ p) $\frac{(x-1)^8}{(x-2)^3} < 0$ q) $\frac{(x-3)^5}{x^2(1-x)^4} < 0$

r) $\frac{(x+2)(x-3)}{x+5} \leq 0$ s) $\frac{x^3-x}{3x+1} \leq 0$ t) $\frac{1}{x-x^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \geq 0$

5) Resolva, em IR, as seguintes equações:

a) $x^4 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0$ b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ c) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$

d) $x^4 + 29x^2 + 100 = 0$ e) $(x-2)^4 = 16$ f) $\frac{4-x^2}{6} - \frac{x^4+x^2}{4} = \frac{4-x^4}{3} - 1$

6) Determine o conjunto solução das seguintes inequações:

a) $\frac{3}{2x+3} \geq 0$ b) $\frac{3x-2}{x-4} \geq 3$ c) $\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x} \leq 1$ d) $\frac{(x-1)^7}{(x-2)^3} < 0$

e) $\frac{x^2-1}{x} > -x$ f) $\frac{-(2x-1)^3}{x^2.(1-x)} \leq 0$ g) $1 + \frac{5-x}{x-2} > \frac{x+5}{x+2}$

7) A evolução do preço de determinado produto é previsto pela função $P(t) = \frac{600t+800}{t+1}$ em que P é o preço em euros e t o tempo em meses.

a) Qual o preço inicial do produto?

b) Qual o preço ao fim de 2 anos?

c) Haverá uma altura em que o preço seja aproximadamente 520 euros?

d) Interprete no contexto do problema a assimptota horizontal do gráfico da função.

8. Numa cozinha, um forno eléctrico estava a funcionar a uma temperatura constante quando houve um corte de energia eléctrica. A partir do instante $t=0$, momento da falha de energia, a temperatura do forno evoluiu de acordo com o seguinte modelo matemático: $T(t) = \frac{150t+250}{6t+1}$, T em graus Celsius e t em horas.

a) Determina a temperatura a que o forno estava a funcionar quando houve a falha de energia eléctrica.

b) Com o decorrer do tempo a temperatura do forno aproximou-se da temperatura ambiente. Determina o valor da temperatura ambiente e fundamenta o teu raciocínio.

c) A pessoa responsável por vigiar o forno apenas se apercebeu da falta de energia eléctrica quando a temperatura do forno era 75ºC.

Determina recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o tempo que decorreu entre a falha de energia e o instante em que a mesma foi detectada. Explica como procedeste e apresenta o resultado em minutos, arredondado às unidades.

d) Admite que, no momento em que houve falha de energia, é introduzido no forno um prato que necessita no mínimo de 20 minutos a uma temperatura não inferior a 100º C.

Utiliza a calculadora para investigar se foi possível confeccionar o prato.

Numa pequena composição, explicita a conclusão a que chegaste, justificando-a.

9. O rio “ Fonte limpa”, principal pólo turístico e fonte de desenvolvimento económico da cidade “ Verde”, este ano, tornou-se a principal causa de preocupação da população ribeirinha devido à subida do nível das águas.

A Protecção Civil está atenta e iniciou o acompanhamento da situação, munida do seguinte modelo matemático:

$$H(t)=\frac{3t+4}{t+3} \quad , \quad H \text{ em metros e } t \text{ em horas.}$$

Este modelo permite calcular a subida do nível das águas em relação ao nível médio, t horas após o inicio do acompanhamento. A Protecção Civil,na cidade “ Verde”, dá início ao acompanhamento destas situações a partir do momento em que o nível das águas atinja 1,2 metros acima do nível médio e deve evacuar a população ribeirinha quando o nível das águas atingir 3 m acima do nível médio.

a) A subida do nível das águas foi maior durante a primeira ou segunda hora de acompanhamento da situação pela Protecção Civil? Justifica.

b) Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolve a inequação $H(t) \leq 2{,}5$.

c) Numa composição matemática, refere o momento em que a Protecção Civil iniciou o acompanhamento e se houve necessidade de evacuar a população ribeirinha.

<u>Soluções</u>:

1. a) $\frac{x}{x+1}; IR \setminus \{-1;0\}$ b) $\frac{x+2}{x}; IR \setminus \{0;2\}$ c) $\frac{3}{5x^3}; IR \setminus \{0\}$

d) $\frac{1}{x+\sqrt{2}}; IR \setminus \{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$ e) $-1-x^2; IR \setminus \{-1;1\}$ f) $\frac{-x}{1+x^2}; IR \setminus \{-1;1\}$

g) $\frac{x-3}{x}; IR \setminus \{0;3\}$ h) $\frac{-x+1}{5+x}; IR \setminus \{-5;5\}$ i) $\frac{3x-2}{x}; IR \setminus \{0;1\}$

j) $\frac{(2x-3).(x+4)}{x+1}; IR \setminus \{-1;1\}$ l) $\frac{x+2}{(x-3)(x+1)}; IR \setminus \{-1;2;3\}$ m) $\frac{2x^2+x+2}{2x+3}; IR \setminus \left\{-\frac{3}{2};1\right\}$

n) $\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x+1}; IR \setminus \{-1;1\}$ o) $x-1; IR \setminus \{0\}$

2. a) $\frac{2x^2-x-4}{x.(x-1)(x-2)}$ $para\ x \neq 0, x \neq 1\ e\ x \neq 2$ b) $\frac{-3x-9}{2x^2-2}$ $para\ x \neq 1,\ x \neq -1$

c) $\frac{5x+24}{x^2-9}$; para $x \in IR \setminus \{-3;3\}$

d) $\frac{2}{x-3}$; para $x \in IR \setminus \{-4;0;3\}$

e) $\frac{1}{x}$; para $x \in IR \setminus \{-2;0;2\}$

f) $\frac{5}{3(x+1)}$; para $x \in IR \setminus \{-2;-1;1\}$

g) $\frac{x^2+2x}{1-x}$; para $x \in IR \setminus \{0;1;3\}$

h) $\frac{8x^3}{(3-x)^2(x-1)}$; para $x \in IR \setminus \{1;3\}$

i) $\frac{-3x^2-9x}{x-1}$; para $x \in IR \setminus \{-3;0;1;3\}$

j) x^2-2x+2; para $x \in IR \setminus \{-1;1\}$

l) $\frac{x+2}{x^2-2x-3}$; para $x \in IR \setminus \{-1;2;3\}$

m) $\frac{4x-10}{x^2-4x+3}$; para $x \in IR \setminus \{0;1;3\}$

3. a) $x=-1$ b) $x=7$ c) $S=\varnothing$ d) $x=\frac{7}{6}$ e) $x=-\frac{3}{2}$

f) $x=-1 \vee x=\frac{9}{2}$ g) $x=0 \vee x=1$ h) $x=0$ i) $S=\varnothing$

4. a) $]-\infty,2[\cup]4,+\infty[$ b) $]-\infty,-5[\cup]-3,+\infty[$ c) $\left]-\frac{1}{2},0\right[\cup]1,+\infty[$

d) $]-\infty,-3[\cup]1,2[$ e) $]-\infty,-3[\cup]-2,+\infty[$ f) $]-\infty,-1[\cup]0,1[$

g) $]-9,-2[\cup]0,2[$ h) $]-\infty,+2[$ i) $\left]-\infty,\frac{6}{7}\right[$

j) $]1,+\infty[$ l) $\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$ m) $]-\infty,1[$ n) $IR \setminus \{25\}$

o) $]-\infty,-3]\cup[3,+\infty[\setminus\{5\}$ p) $]-\infty,1[\cup]1,2[$ q) $]-\infty,3[\setminus\{0,1\}$

r) $]-\infty,-5[\cup[-2,3]$ s) $\left[-1,-\frac{1}{3}\right[\cup[0,1]$ t) $]-\infty,-3]\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$

5. a) $\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$ b) $\{-3,-2,2,3\}$ c) $\{-4,4\}$ d) $S=\varnothing$

e) $\{0,4\}$ f) $\{-2,-1,1,2\}$

6. a) $\left]-\frac{3}{2},+\infty\right[$ b) $]4,+\infty[$ c) $]-3,0[\cup\left[\frac{3}{7},+\infty\right[$ d) $]1,2[$

e) $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right[\cup\left]\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$ f) $\left[\frac{1}{2},1\right[$ g) $]-4,-2[\cup]2,4[$

7. a) 800 € b) 608 € c) Não, pois $y=600$ é A.H

8. a) 250º C b) 25º C c) 35 minutos d) Sim

9. a) 1ª hora

b) $t\in[0,7]$. Durante as 7 primeiras horas de acompanhamento, da situação por parte da Protecção Civil, a subida do nível das águas, em relação ao nível médio, não foi superior a 2,5 metros.

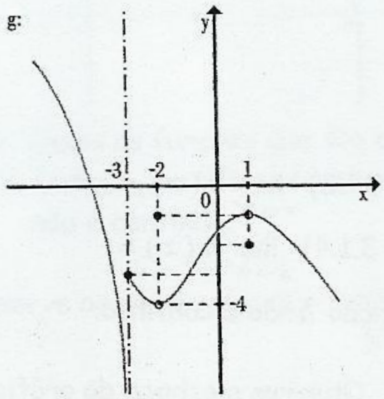
c) O início do acompanhamento deu-se quando $H \cong 1,3m$.

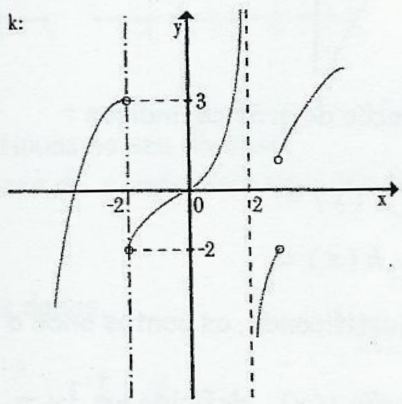
Não foi necessário evacuar a população.

Ficha de Trabalho

- Limites e continuidade

1) Considere, em $\Re$, as funções g e k, r.v.r., dadas pelos seguintes gráficos :





Observe os gráficos e indique :

1.1) $\lim\limits_{x \to -3^-} g(x) =$

1.2) $\lim\limits_{x \to -3^+} g(x) =$

1.3) $\lim\limits_{x \to -2^-} g(x) =$

1.4) $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) =$

1.5) $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) =$

1.6) $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) =$

1.7) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) =$

1.8) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

1.9) $\lim\limits_{x \to -2^-} k(x) =$

1.10) $\lim\limits_{x \to -2^+} k(x) =$

1.11) $\lim\limits_{x \to 2^-} k(x) =$

1.12) $\lim\limits_{x \to 2^+} k(x) =$

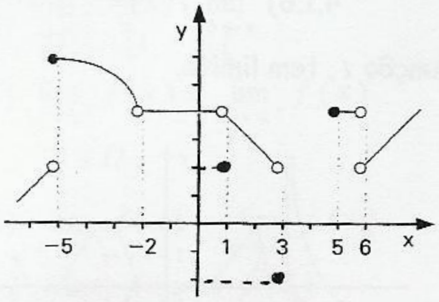
1.13) $\lim\limits_{x \to 3^-} k(x) =$

1.14) $\lim\limits_{x \to 3^+} k(x) =$

1.15) $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x) =$

1.16) $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) =$

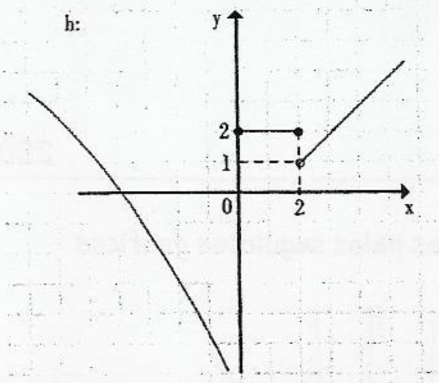
2) Considere a função f, r.v.r. , cujo gráfico é o seguinte :



2.1) Indique o domínio da função.

2.2) Indique os pontos de descontinuidade da função.

3) Considere a função h , r.v.r., cujo gráfico é o seguinte :



3.1) Por observação do gráfico, indique :

3.1.1) $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) =$

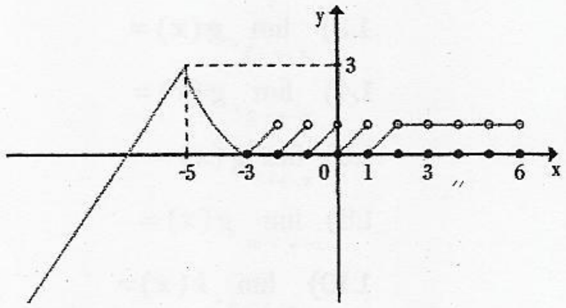
3.1.2) $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) =$

3.1.3) $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) =$

3.1.4) $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) =$

3.2) Indique, justificando, os pontos onde a função h não é contínua.

4) Considere a função $t(x)$, definida em $\left]-\infty, 6\right]$. Observe o esboço do gráfico.



4.1) Indique :

4.1.1) $\lim\limits_{x \to -\infty} t(x) =$

4.1.2) $\lim\limits_{x \to -5^-} t(x) =$

4.1.3) $\lim\limits_{x \to -5^+} t(x) =$

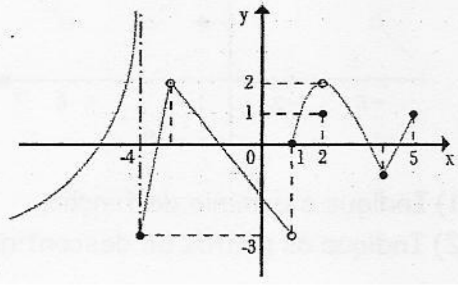
4.1.4) $\lim\limits_{x \to -3^-} t(x) =$

4.1.5) $\lim\limits_{x \to -3^+} t(x) =$

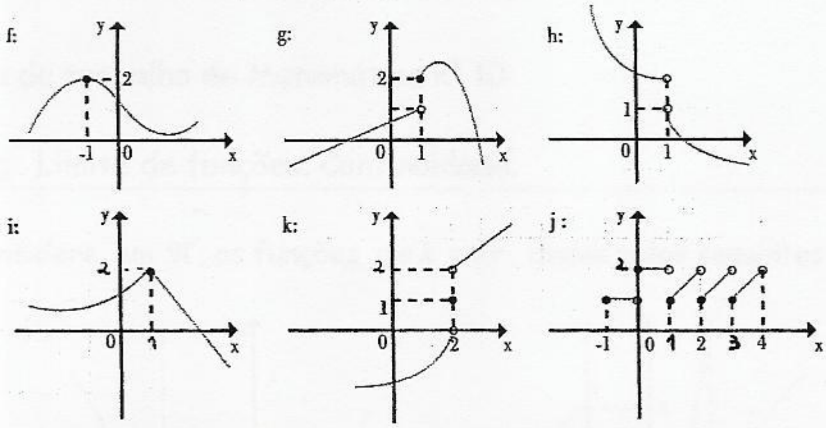
4.1.6) $\lim\limits_{x \to 6^-} t(x) =$

4.2) Diga para que valores do domínio a função t , tem limite.

5) Na figura está representado o esboço do gráfico de uma função j , real de variável real.
Indique, justificando, os valores de x para os quais a função é descontínua .



6) Observe os gráficos das seis funções reais de variável real :

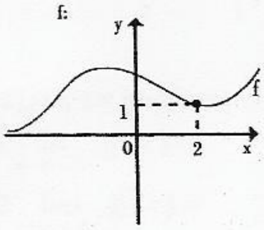


6.1) Quais as funções que são contínuas no seu domínio.

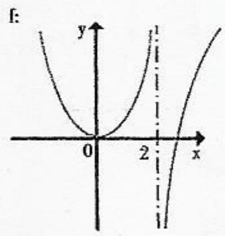
6.2) Indique, justificando, os valores de x onde cada uma das funções não é contínua.

7) Observe os gráficos e as condições dadas.

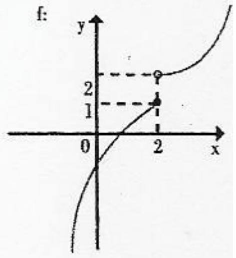
I)



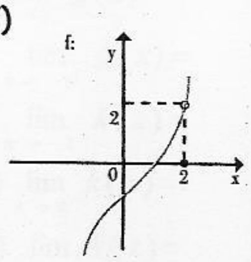
II)



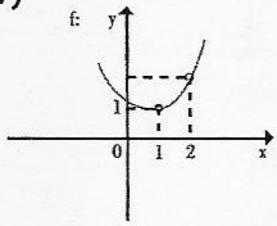
III)



IV)



V)



A) $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$D'_f = [1, +\infty[$

B) $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$

C) $\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$

$2 \notin D_f$

D) $\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$

E) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$

$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

7.1) Associe cada um dos gráficos a uma das condições dadas.

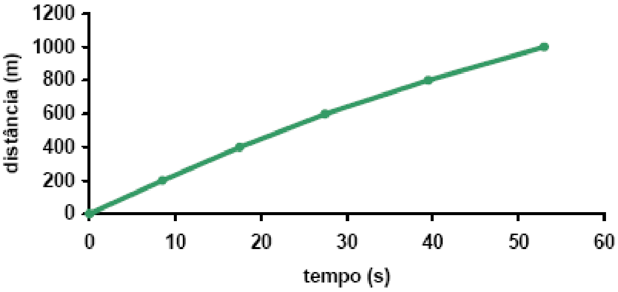
7.2) Das funções dadas, indique as que são contínuas nos pontos $x=1$ e $x=2$.

Ficha de Trabalho

- Derivadas

1. A corrida

Numa corrida de 1000 metros em bicicleta, organizada na escola, o Fernando fez os tempos indicados.



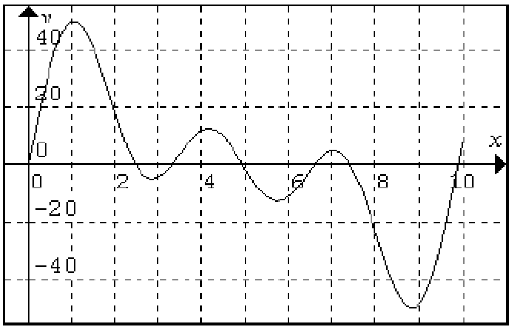
Distância em metros	Tempo em segundos
0	0
200	8,5
400	17,5
600	27,5
800	39,5
1000	53

a. Qual foi a velocidade média na totalidade do percurso?

b. Qual foi a velocidade média em cada um dos intervalos considerados?

c. Quando revelou o Fernando sinais de cansaço?

2. Observe o gráfico e indique:



a. Um intervalo onde a taxa média de variação seja positiva.

b. Um intervalo onde a taxa média de variação seja negativa.

c. Um intervalo onde a taxa média de variação seja nula.

d. Um intervalo onde a taxa média de variação seja negativa e a função não seja monótona.

3. Verdadeiro ou falso?

Indique, justificando, o valor lógico das afirmações:

a. “Se $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} < 0$, então f é decrescente em $]1;2[$.”

b. “Se f’(0) = 0, então f tem um extremo em x = 0.”

c. “Se $f'(x) > 0, \forall x \in [0;+\infty[$ então f é crescente em $[0;+\infty[$.”

d. “Se $f(x) = |x|$, então f tem derivada nula em x = 0.”

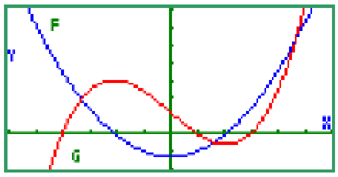
e. “Se $f(x) = x^3$, então f tem um extremo em x = 0.”

f. “Se f tem um extremo relativo, então f’ tem um zero.”

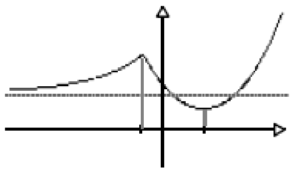
Ficha de Trabalho

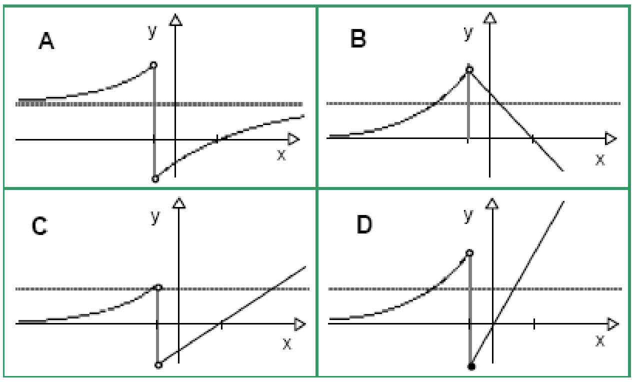
- Derivadas

4. Na figura ao lado estão representadas uma função e a sua derivada. Qual é o gráfico de qual? Justifique.



5. Na figura ao lado está representado o gráfico da função h. Um dos gráficos abaixo é o da derivada de h. Indique qual é ele, explicando porquê, e porque é que os outros não servem.





6. O quadro seguinte apresenta alguns valores eo sinal de f', derivada da função f, real de domínio $\mathbb{R}$.
O domínio de f' é $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Defina graficamente duas funções distintas que tenham f' por derivada.

x	$-\infty$	2		4	$+\infty$
$f'(x)$	-1		+	0	-

7. Considere a função, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \Leftarrow x \leq 0 \\ 2x - 1 & \Leftarrow x > 0 \end{cases}$
   a. Represente-a graficamente.
   b. Descreva o gráfico da função, indicando nomeadamente o domínio, contradomínio, extremos e intervalos de monotonia.
   c. Estude a existência de derivada no ponto de abcissa 0. Que conclusão tira?
   d. Esboce o gráfico da função derivada de y.

8. Uma bola desce um plano inclinado. A distância d, em centímetros, percorrida pela bola em função do tempo t, em segundo, é dada por d = $2t^3 + 3t^2$, para $0 \leq t \leq 5$.
   a. Represente graficamente a função d na situação descrita.
   b. Determine a velocidade média da bola no 1º segundo de movimento.

Ficha de Trabalho

- Derivadas

c. Qual será a velocidade da bola no instante t = 3 segundos?

d. Em que instante terá a bola uma velocidade de 36 cm/s?

e. Construa o gráfico da velocidade da bola em função do tempo.

9. Um projéctil é lançado verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 120 m/s. A sua distância ao solo, em metros, após *t* segundos é $d(t) = -4{,}9t^2 + 120t$.

   a. Qual é a altura máxima que o projéctil atinge?

   b. Em que instante chega ao solo?

   c. Qual é a velocidade do projéctil em cada instante?

   d. Com que velocidade chega ao solo?

   e. A aceleração é a taxa de variação (instantânea) da velocidade. Qual é a aceleração do projéctil no instante *t*?

   f. Compare os gráficos da altura, velocidade e aceleração do projéctil.

10. Considere os rectângulos de área 50 cm^2. Seja *P* a função que a cada *x* (medida da base) faz corresponder o perímetro do rectângulo.

x

   a. Mostre que $P(x) = 2x + \frac{100}{x}$, para $x > 0$.

   b. Determine os valores de *x* para os quais o perímetro é inferior a 30 cm.

   c. Determine a derivada de P(x).

   d. Determine os intervalos de monotonia de *P* e as dimensões do rectângulo que tem perímetro mínimo.

11. A evolução da temperatura do ar em Lamego entre as 0 e as 24 horas do dia 1 de Janeiro foi dada pela função $T(h) = 20 + h + \frac{500}{h-35}$, com T em graus centígrados e h em horas.

   a. Determine a taxa de variação da temperatura às 0 horas do dia 1 de Janeiro.

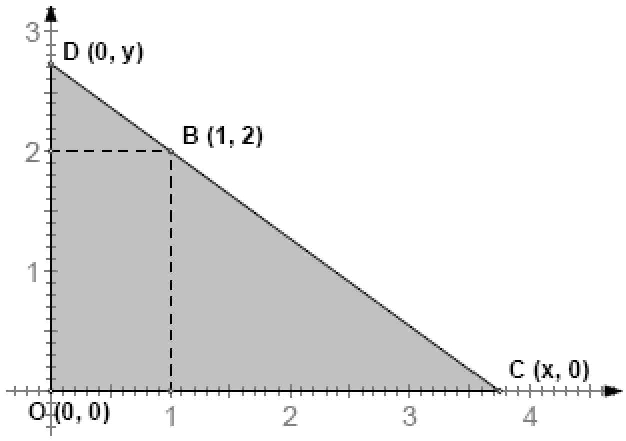
   b. Sabendo que $T'(h) = 1 - \frac{500}{(h-35)^2}$ determine os intervalos de monotonia de T e o instante (com aproximação ao minuto) em que foi máxima a temperatura do ar nesse dia.

   c. Escreva a equação reduzida da recta que é tangente ao gráfico de T no ponto de abcissa h = 10.

Ficha de Trabalho

- Derivadas

12. No referencial ortonormado da figura, considere:



- Seja B o ponto de coordenadas (1,2)
- A cada ponto C(x,0) do eixo Ox, com x>1, faz-se corresponder um ponto D(0,y) do eixo Oy, de modo que B, C e D sejam colineares.

  a. Mostre que:

  i. $y = \frac{2x}{x-1}$ exprime y em função de x (para $x > 1$).

  ii. A área A(x) do triângulo [OCD] é dada por

  $$A(x) = \frac{x^2}{x-1}, \ (x > 1)$$

  b. Sabendo que $A'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ (A' designa derivada de A):

  i. Determine o maior intervalo onde A é crescente e o maior intervalo onde é decrescente.

  ii. Determine, com aproximação às centésimas, o perímetro do triângulo [OCD] que tem área mínima

13. A taxa de variação do custo relativamente ao nº de unidades produzidas chama-se custo marginal.

Um fabricante de pequenos motores estima que o custo de produção de x motores por dia é dado por $C(x) = 100 + 60x + \frac{50}{x}$ (em euros).

N.º de motores	Custo	Custo médio	Custo marginal
x	$C(x)$	$\frac{C(x)}{x}$	$C'(x)$
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Custo do motor	
$C(x) - C(x-1)$	
2.º	
3.º	
4.º	
5.º	
6.º	

a. Compare o custo marginal da produção de 5 motores com o custo da produção do 6º motor.

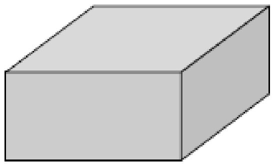
b. Complete a tabela ao lado.

Ficha de Trabalho

- Derivadas

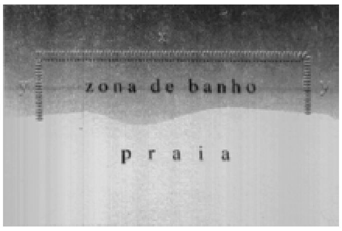
14. Uma caixa com a forma de um paralelipípedo de base quadrada de lado x cm tem uma área total de 150 cm2.

    a. Mostre que o volume do paralelipípedo é dado pela expressão $V(x)=\dfrac{75x-x^3}{2}$.

    b. Determine as dimensões da caixa, sabendo que ela apresenta um volume máximo para a área total indicada.

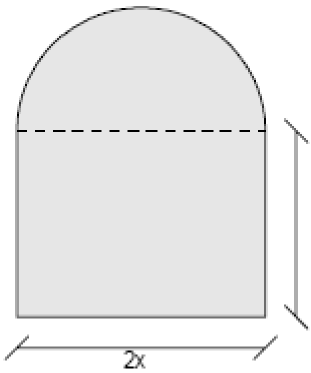
15. Pretende-se vedar com uma fita de flutuadores uma zona rectangular com 200 metros quadrados de área, para banho das crianças, como mostra a figura.
    Se cada metro da fita de flutuadores custar 10€, qual deverá ser o valor de x e de y para que o gasto na compra seja mínimo?



16. Um agricultor dispõe de 100€ para construir uma vedação com forma rectangular. A vedação deve ser feita do seguinte modo:
    - Um dos lados em muro de tijolo
    - Nos três lados restantes, com rede.

    Cada metro de rede custa 1€ e cada metro de muro de tijolo fica em 3€.
    Qual é a área máxima que o agricultor consegue vedar nestas condições?

17. Uma janela é formada por um rectângulo e por um semicírculo, conforme indicado na figura. O perímetro da janela deve ser igual a 5 metros. Pretende-se encontrar as dimensões da janela a fim de que a abertura tenha uma área máxima.



    a. Exprima o perímetro da janela em função de *x* e de *y*.
    b. Retire da expressão anterior o valor de y em função de *x*.
    c. Para que valores de *x* se tem *y* > 0 ?
    d. Utilizando os resultados anteriores, mostre que a área se pode escrever na forma $a(x)=5x-\dfrac{4+\pi}{2}x^2$.
    e. Determine para que valores de x e de y a área da janela é máxima.

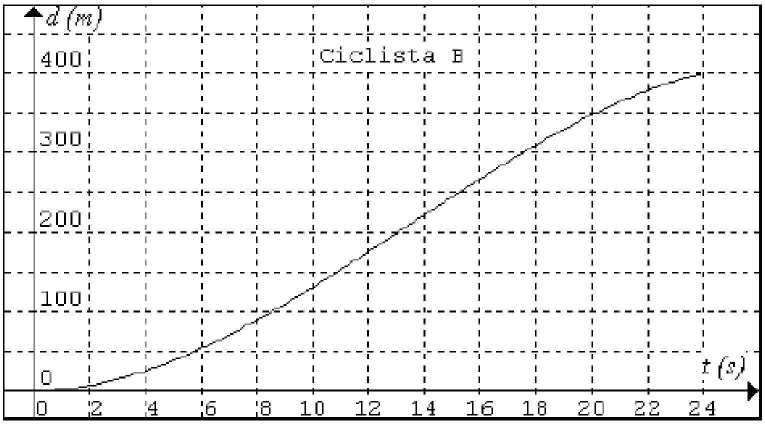
Ficha de Trabalho

- Derivadas

18. Numa etapa da Volta a Portugal em Bicicleta, dois ciclistas, A e B, cortam uma meta de prémio da montanha ao mesmo tempo e iniciam uma descida de 400 metros. A partir desse instante, as distâncias percorridas são dadas em função do tempo por:

    • $d(t) = 0{,}4t^2 + 6t$, para o ciclista A

    • o gráfico ao lado, para o ciclista B com d em metros e t em segundos.



   a. Qual dos ciclistas chegou primeiro ao fim da descida? Justifique. Determine as respectivas velocidades médias (em quilómetros por hora) nesse percurso de 400 metros.

   b. Determine, o mais rigorosamente possível, a velocidade (em quilómetros por hora) do ciclista B no instante t = 20 segundos. Descreva os seus procedimentos.

   c. Nesse percurso de 400 metros e relativamente ao ciclista A:

      i. Calculando o valor da tmv$[x_0, x_0 + h]$ de d quando a amplitude do intervalo tende para zero, mostre que a sua velocidade (em metros por segundo) variou ao longo do tempo (em segundos) segundo a relação $v(t) = 0{,}8t + 6$.

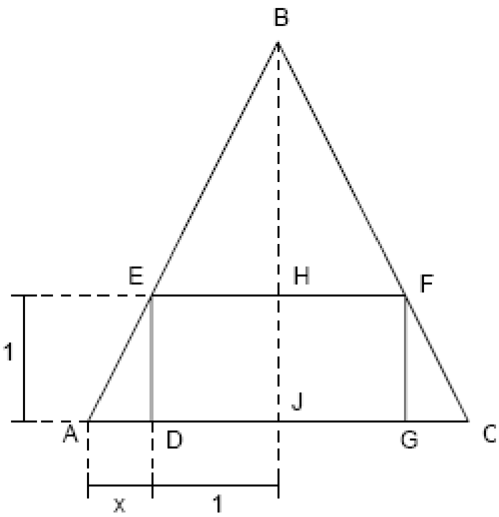
      ii. A sua aceleração foi maior no momento em que cortou a meta de prémio da montanha ou no momento em que chegou ao fim da descida? Justifique.

19. Na figura

    • o triângulo [ABC] é isósceles (AB = BC)

    • [DEFG] é um rectângulo

    • DG = 2 ; DE = 1; AD = x



   a. Mostre que a área do triângulo [ABC] é dada em função de x, por $a(x) = 2 + x + \frac{1}{x}$ (x > 0).

      NOTA: Pode ser-lhe útil reparar que os triângulos [ADE] e [EHB] são semelhantes.

   b. Sabe-se que $a'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. (a' designa a derivada de a). Estude a monotonia e extremos da função definida em IR^+ por a(x) e interprete os resultados relativamente à situação inicialmente apresentada.

Ficha de Trabalho

- Derivadas

Soluções:

1.

a) 18,87 m/s.

b) 23,53 m/s; 22,22 m/s; 20,00 m/s; 16,67 m/s e 14,81 m/s.

c) De forma significativa, a partir dos 600 metros.

2. Por exemplo:

a) [0, 2].

b) [3, 6].

c) [0, 5].

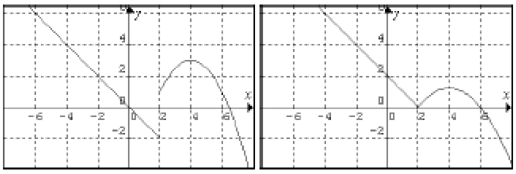
d) [5, 6].

3. São todas falsas, excepto a da alínea c).

4. $F(x) = G'(x)$

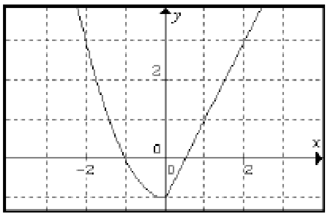
5. C

6. Por exemplo:



7.

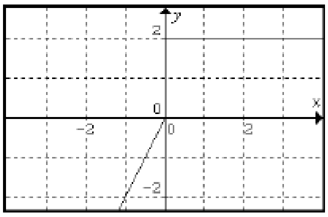
a)



b) $D_y = IR$; $D'_y = [-1, +\infty[$; -1 é um mínimo absoluto;
é estritamente decrescente em IR^- e estritamente crescente em IR^+ .

c) Não existe derivada no ponto de abcissa 0, pois $y'(0^-) = 0$ e $y'(0^+) = 2$.

d)

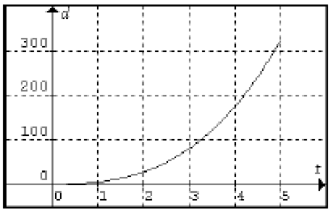


Ficha de Trabalho

- Derivadas

8

a)

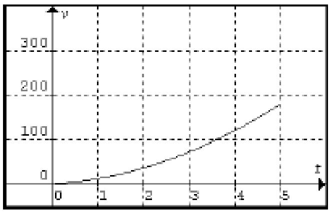


b) 5 cm/s.

c) 72 cm/s.

d) No instante $t = 2$ segundos.

e)



9

a) 735 metros, aproximadamente.

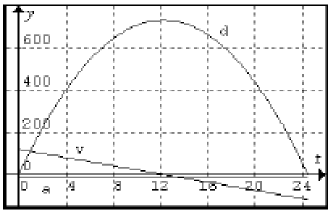
b) Decorridos 24,5 segundos, aproximadamente.

c) No instante t a velocidade é, em metros por segundo, dada por $v(t) = d'(t) = -9{,}8t + 120$.

d) 120 m/s (-120 m/s).

e) No instante t a aceleração é, em m/s^2, dada por $a(t) = v'(t) = d''(t) = -9{,}8$.

f)



10

b) O perímetro é inferior a 30 cm para valores de $x \in \left]5, 10\right[$, em centímetros.

d) P é decrescente em $\left]0, 5\sqrt{2}\right]$ e crescente em $\left[5\sqrt{2}, +\infty\right[$; $x = 5\sqrt{2}$ é um minimizante.
O rectângulo que tem perímetro mínimo é um quadrado de lado $5\sqrt{2}$ cm.

11

a) Às 0 horas do dia 1 de Janeiro, a taxa de variação da temperatura foi de 0,59 ºC/h, aproximadamente.

b) T é estritamente crescente no intervalo $\left[0, 35 - 10\sqrt{5}\right[$ e estritamente decrescente no intervalo $\left]35 - 10\sqrt{5}, 24\right]$.
A temperatura máxima nesse dia ocorreu aproximadamente às 12h 38m.

c) A equação pedida é $T = 0{,}2h + 8$.

12

b1) A função é decrescente em $\left]1, 2\right]$ e crescente em $\left[2, +\infty\right[$.

b2) O triângulo de área mínima tem de perímetro 10,47 (2 c.d.).

13

a) $C'(5) = 58$ e $C(6.º) = C(6) - C(5) \approx 58{,}33$.

14

b) $V'(x) = \dfrac{75 - 3x^2}{2}$;
Dimensões da caixa: $5cm \times 5cm \times 5cm$.

15

O gasto mínimo é de 400 €, para $x = 20$ e $y = 10$ metros.

16

Nestas condições, o agricultor consegue vedar uma área máxima de 312,5 m^2.

17

a) $P = (2 + \pi)x + 2y$.

b) $y = \dfrac{P - (2 + \pi)x}{2}$.

c) Como $P = 5$, então $x < \dfrac{5}{2 + \pi}$ ($x > 0$).

e) $x = y = \dfrac{5}{4 + \pi}$.

18

a) O ciclista B chegou primeiro.
Em km/h, as velocidades são
$v_{mA} = 16 \times \dfrac{3600}{1000} = 57{,}6$ e
$v_{mB} = \dfrac{400}{24} \times 3{,}6 = 60$.

b) A velocidade pedida é aproximadamente $v = 17{,}5 \times 3{,}6 = 63$ km/h.

c2) A aceleração do ciclista **A** foi constante e igual a 0,8 m/s^2.

19

b) A área mínima do triângulo [ABC] é 4 unidades de área, sendo obtida para $x = 1$.
Quando $x \to 0^+$ ou $x \to +\infty$, então $a(x) \to +\infty$. Portanto, quando x varia no intervalo $\left]0, +\infty\right[$, a área do triângulo considerado decresce desde um valor infinitamente grande positivo até ao valor mínimo 4 (para $x = 1$), passando depois a crescer, atingindo novamente valores infinitamente grandes positivos.

Ficha de Trabalho

- Função inversa

1. Considera as funções reais de variável real f e g, definidas por: $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+2x}$ e $g(x) = x^2 + x - 2$.

   1.1 Determina, em |R, o conjunto solução da condição $f(x) \leq 0$

   1.2 Caracteriza a função $f \times g$

   1.3 Existirá g^{-1}? Justifica.

   1.4 Sendo h a função definida por $h(x) = \dfrac{x-1}{x}$, determina, em IR, o conjunto solução da equação $(f + h)(x) = 0$.

2. Determina, em |R, o conjunto solução de cada uma das seguintes equações:

   2.1 $\sqrt{2x+5} = 1$

   2.2 $x - \sqrt{7-3x} = 1$

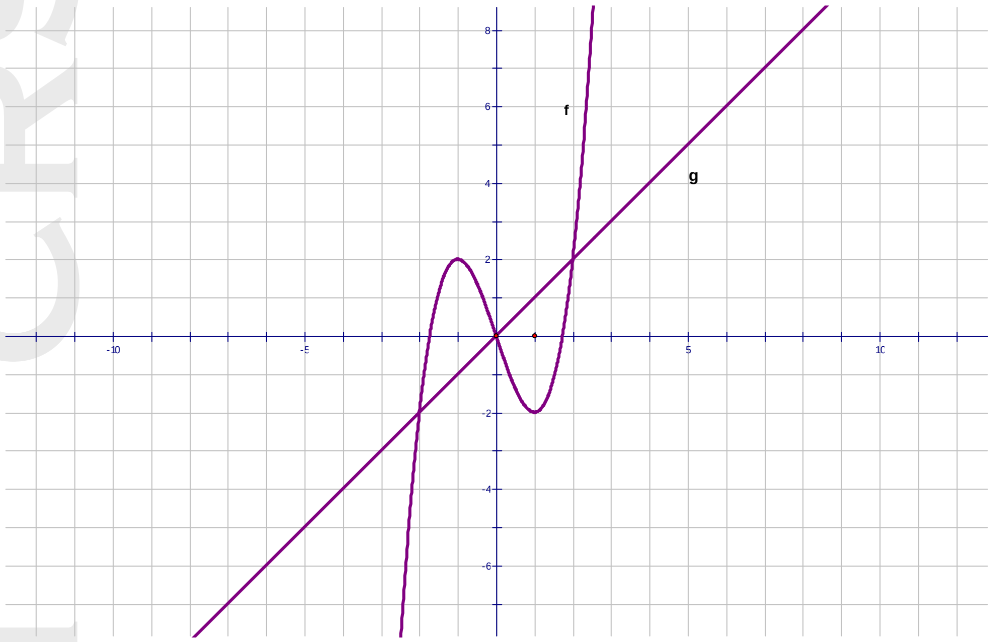
   2.3 $\sqrt{x^2+5} - \sqrt{5-x} = 0$

   2.4 $\sqrt{x^2-4} = \dfrac{x}{2} - 1$

   2.5 $2 + \sqrt{1-x} = x + 7$

   2.6 $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 3$

3. Na figura estão representadas graficamente duas funções f e g.



   3.1 Elabora um quadro com o estudo do sinal da função $f - g$

3.2 Sabendo que f e g são duas funções definidas por polinómios de graus 3 e 1, respectivamente, define, analiticamente, cada uma das funções e comprova as conclusões obtidas na alínea anterior.

4. Considera as funções reais de variável real f, g e h definidas por:

$f(x) = x - 2$, $g(x) = -2 + \sqrt{6+x}$, $h(x) = \dfrac{x^2 - 3}{1 - x}$

4.1 Determina as abcissas dos pontos de intersecção do gráfico de h com a bissectriz dos quadrantes ímpares

4.2 Determina, em |R, o conjunto solução de cada uma das seguintes condições:

4.2.1 $h(x) \geq -f(x)$

4.2.2 $g(x) = f(x)$

4.3 Caracteriza a função $g \circ f$.

5. Considera as funções reais de variável real m e t, definidas por: $m(x) = \dfrac{1}{x+1}$ e $t(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$.

Caracteriza as funções:

5.1 m + t

5.2 $m \times t$

5.3 m^{-1}

6. Considera as funções reais de variável real f e g, definidas por: $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

Caracteriza as funções:

6.1 g^{-1}

6.2 $f \circ g$

6.3 Calcula o valor exacto de:

6.3.1 $(f \circ g)(-2)$

6.3.2 $(f \circ g)(11)$

Soluções:

1.1 $\left]-\infty,-2\right[\cup\left[-\frac{2}{3},0\right[$ 1.2 f×g: |R\{-2, 0} → |R

$$x \mapsto \frac{3x+2}{x^2+2x} \times (x^2+x-2)$$

1.3 não, porque não é injectiva. 1.4 -4

2.1 -2 2.2 2 2.3 -1 e 0 2.4 { } 2.5 -3 2.6 1

3.1

x	-∞	-		0		2	+∞
f-g	-	0	+	0	-	0	+

3.2 g(x) = x f(x) = $x^3 - 3x$

4.1 (-1, -1); (1, 1) 4.2.1 $\left]1,\frac{5}{3}\right]$ 4.2.2 {3} 4.3 gof: $\left[-4,+\infty\right[\to \Re$

$$X \mapsto -2+\sqrt{4+x}$$

5.1 m+t : |R\{-1, 0} $\to \Re$

$$x \mapsto \frac{1}{x+1} + \frac{x^2-1}{x^3}$$

5.2 m ×t : : |R\{-1, 0} $\to \Re$

$$x \mapsto \frac{1}{x+1} \times \frac{x^2-1}{x^3}$$

5.3 m^{-1} : |R\{0} $\to \Re$ \{-1}

$$x \mapsto \frac{1}{x}-1$$

6.1 g^{-1} : |R\{1} $\to \Re$ \{2}

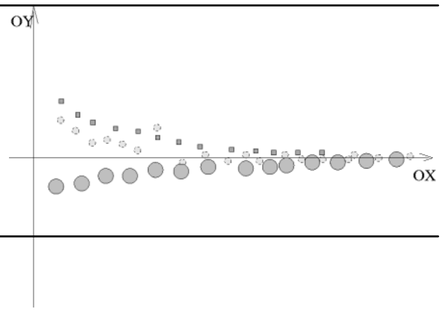
$$x \mapsto -\frac{3+2x}{1-x}$$

6.2 fog : $\left]-\infty,1\right]\cup\left[2,+\infty\right[\mapsto \Re$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{x+3}{x-2}+2}$$

6.3.1 $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 6.3.2 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

Ficha de Trabalho



- Progressões aritméticas e geométricas

1) Numa progressão aritmética de razão – 3 o 1º termo é 5.

1.1) Determine o 7º e o 18º termo.

1.2) Determine a expressão do termo geral.

2) Numa progressão aritmética $u_7=17 \ \ e \ \ u_{25}=-12$.

2.1) Determine a razão da progressão.

2.2) Determine a expressão do termo geral.

3) Calcule o 1º termo e a razão de uma progressão aritmética cujo termo geral é $u_n=3-5n$.

4) Numa progressão aritmética o 1º e o 2º termo são respectivamente 4 e 6.

4.1) Calcule a razão e uma expressão do termo geral.

4.2) Calcule a soma dos 8 termos consecutivos da progressão a partir do 6º termo inclusivé.

5) Numa progressão aritmética de razão 2, a soma dos 10 termos consecutivos a partir do 6º (exclusivé) é igual a 60. Escreva uma expressão do termo geral.

6) Das sucessões seguintes indique as que são progressões e classifique-as:

6.1) $a_n=5n+3$

6.2) $b_n=\dfrac{n+1}{n}$

6.3) $c_n=2^{2n-2}$

6.4) $d_n=\dfrac{4-n}{5}$

7) Numa progressão geométrica de razão – 3, o 1º termo é $\dfrac{1}{27}$.

7.1) Calcule o 7º e o 10º termo.

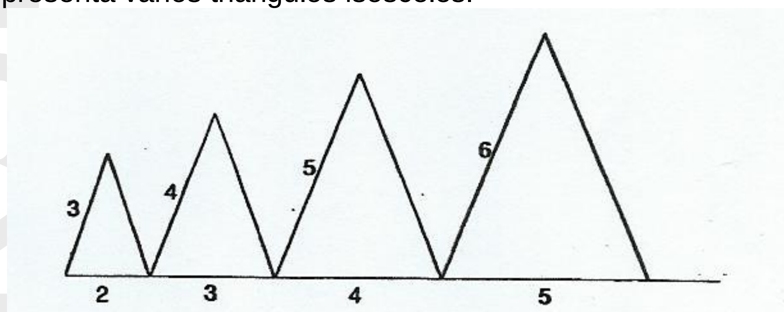
7.2) Determine a expressão do termo geral.

8) De uma progressão geométrica (u_n) sabe-se que $u_6=\frac{1}{2}$ e $u_9=4$. Determine uma expressão do termo geral.

9) O 1º e o 6º termo de uma progressão geométrica são respectivamente 4 e $\frac{1}{8}$.

Calcule a soma dos 10 termos consecutivos a partir do 7º inclusive.

10) A figura representa vários triângulos isósceles.



No primeiro triângulo a base mede 2 cm e um dos lados 3 cm. Adicionando 1 cm ao comprimento de cada um dos lados obtém-se o segundo e assim sucessivamente.

A sucessão (p_n) dos perímetros dos triângulos obtidos deste modo é uma progressão aritmética.

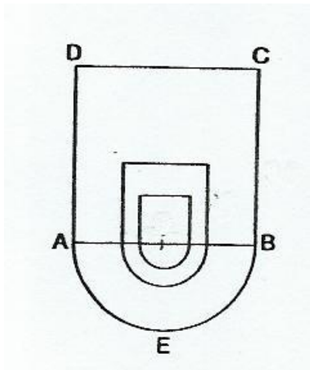
Relativamente a (p_n) determine:

10.1) O primeiro termo e a razão.

10.2) Uma expressão do termo geral.

10.3) A soma dos dez primeiros termos.

11) Na figura estão representados três quadrados e três semi-circunferências. Cada quadrado é obtido duplicando o lado do anterior.



Considere a sucessão (p_n) dos perímetros das figuras compostas de um quadrado e respectiva semicircunferência.

O 1º termo desta sucessão é o perímetro da figura [AEBCD].

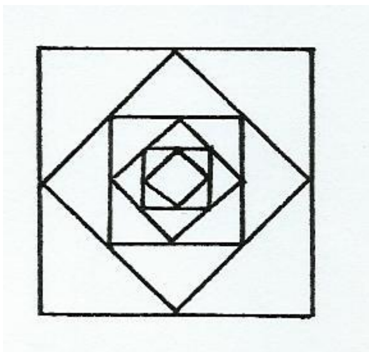
Represente por **r** a medida do raio da semicircunferência menor.

11.1) Calcule p_1, p_2 e p_3.

11.2) Escreva uma expressão geral de (p_n).

11.3) Determine a soma S_n dos n primeiros termos consecutivos de (p_n).

12) Considere-se um quadrado de $8\,m$ de lado. Se unirmos os pontos médios dos lados consecutivos, obtém-se um novo quadrado.



E repetindo esta operação com o novo quadrado obtém-se outro, e assim sucessivamente.

12.1) Calcule a medida do lado de cada um dos primeiros três quadrados.

12.2) Escreva uma expressão do termo geral da sucessão das medidas dos lados dos quadrados obtidos quando esta operação se realiza indefinidamente.

SOLUÇÔES:

1.1) – 13, - 46

1.2) $8-3n$

2.1) $-\frac{29}{18}$

2.2) $\frac{-29n+509}{18}$

3) $-2,-5$

4.1) 2 ; $2n+2$

4.2) 168

5) $2n-17$

6.1) Progressão aritmética de razão 5

6.2) Não é progressão.

6.3) Progressão geométrica de razão 4.

6.4) Progressão aritmética de razão $-\frac{1}{5}$

7.1) $27\ ;\ -3^6$

7.2) $-\frac{1}{81}\times(-3)^n$

8) $\left(\frac{1}{2}\right)^6\times 2^{n-1}$

9) $\frac{1023}{8192}$

10.1) $p_1=8\ ;\ r=3$

10.2) $p_n=5+3n$

10.3) $S_{10}=215$

11.1) $p_1=r.(\pi+6);\ p_2=2r.(\pi+6)\ \ e\ \ p_3=4r.(\pi+6)$

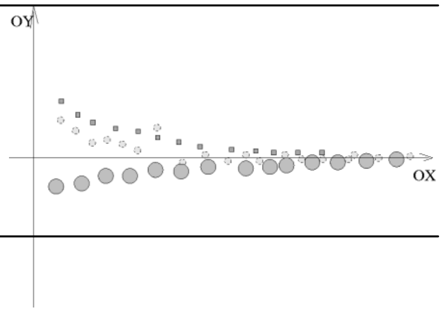
11.2) $p_n=r.(\pi+6).2^{n-1}$

11.3) $S_n=r.(\pi+6).(2^n-1)$

12.1) $l_1=8\ ;\ l_2=4\sqrt{2}\ ;\ l_3=4\ ;\ l_4=2\sqrt{2}$

12.2) $l_n=8.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

Ficha de Trabalho



- Infinitamente grandes e infinitésimos

1) Classifique em infinitamente grande positivo, negativo ou infinitamente grande em módulo, cada uma das sucessões definidas pelas seguintes expressões:

1.1) n^3	1.6) $2n-3$	1.11) -3^n+10
1.2) $2n$	1.7) $(2,3)^n$	1.12) $(-3)^n$
1.3) $-2n$	1.8) $\frac{5^{2n}}{6^n}$	1.13) $6-2n^2$
1.4) n^4-4	1.9) $\frac{5^n-2}{3}$	1.14) $3n+n^2$
1.5) $n+5$	1.10) $\left(n+\frac{1}{3}\right)^n$	1.15) $\frac{n^2+1}{5n}$

2) Indique, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas.
Em cada um dos casos, se possível, dê um exemplo ou um contra- exemplo.

2.1) Uma sucessão decrescente é limitada superiormente.
2.2) Uma sucessão decrescente é limitada inferiormente.
2.3) Uma sucessão crescente tende para $+\infty$.
2.4) Uma sucessão não limitada superiormente tende para $+\infty$.
2.5) Toda a sucessão crescente é não limitada.
2.6) Uma sucessão que tende para $+\infty$ é crescente.
2.7) Uma sucessão que tende para $-\infty$ é não limitada.
2.8) Uma sucessão que tende para $+\infty$ não é majorada nem minorada.
2.9) Uma sucessão que tende para $-\infty$ pode não ser decrescente.
2.10) Uma sucessão decrescente pode ser um infinitamente grande positivo.
2.11) Toda a sucessão que tende para $-\infty$ é decrescente.

3) Considere as sucessões de termo geral:

$$b_n=3n-1;\ c_n=4-3n;\ d_n=\frac{5}{n+4};\ e_n=\left(\frac{11}{10}\right)^{-n}$$

3.1) Calcule a ordem a partir da qual $b_n > 1000$

3.2) Prove que b_n é um infinitamente grande positivo.

3.3) Mostre que c_n é um infinitamente grande negativo.

3.4) Calcule a ordem a partir da qual $d_n \langle 0{,}1$.

3.5) Algumas das sucessões são infinitésimos? Justifique.

3.6) A sucessão $b_n + c_n$ é um infinitamente grande positivo? Porquê ?

4) Aplicando os teoremas sobre infinitamente grandes positivos, mostre que são infinitamente grandes as sucessões de termo geral:

4.1) $a_n = 2\sqrt{n}$

4.2) $b_n = n^2 + 1$

4.3) $c_n = 3 - n^2$

4.4) $d_n = \dfrac{\sqrt{n} - 1}{5}$

4.5) $e_n = \dfrac{2^n}{4}$

4.6) $f_n = n^2 + 2n$

4.7) $g_n = \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$

4.8) $h_n = -8n^2 - 9$

4.9) $i_n = \dfrac{n^2 + 5}{2n}$

4.10) $j_n = (-5)^n$

4.11) $k_n = (-1)^n \times \left(-2 - n^2\right)$

5) Considere a sucessão de termo geral $v_n = 2\sqrt{n+2}$.

5.1) Determine o primeiro termo que é maior que 10.

5.2) Calcule a menor ordem depois da qual os termos de (v_n) excedem 500.

6) Considere a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{20n}{n+1}$.

6.1) Determine o primeiro termo maior que $\dfrac{31}{2}$.

6.2) Haverá algum termo maior ou igual a 20? Justifique.

6.3) Será (u_n) um infinitamente grande? Justifique.

7) Aplicando os teoremas sobre infinitésimos, mostre que são infinitésimos as sucessões de termo geral:

7.1) $a_n = \dfrac{1}{n^2 + 1}$

7.6) $f_n = \dfrac{n+1}{n^2 + 2n + 1}$

7.2) $b_n = \dfrac{3}{5 \times 2^n}$

7.3) $c_n = \dfrac{3n}{3n^2 + 1}$

7.4) $d_n = -\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

7.5) $e_n = \dfrac{2^n}{3^n + 5}$

7.7) $g_n = -\dfrac{1}{3\sqrt{n}}$

7.8) $h_n = \dfrac{(-1)^n}{5^{2n}}$

7.9) $i_n = \dfrac{2^{3n+1}}{9^n}$

7.10) $j_n = 2^{-n} \times \cos \dfrac{n\pi}{3}$

8) Das seguintes sucessões quais são infinitésimos:

8.1) $u_n = \begin{cases} -1 & se \;\; n \;\; par \\ \dfrac{1}{n} & se \;\; n \; impar \end{cases}$

8.2) $v_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} & se \; n \;\; par \\ \dfrac{1}{n^2} & se \; n \; impar \end{cases}$

8.3) $w_n = \begin{cases} 0 & se \;\; n \;\; par \\ \dfrac{1}{3\sqrt{n} + 1} & se \;\; n \; impar \end{cases}$

8.4) $z_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2} & se \;\; n \geq 1000 \\ 2 & se \;\; n \langle 1000 \end{cases}$

SOLUÇÕES:

1.1) Infinitamente grande positivo.
1.2) Infinitamente grande positivo.
1.3) Infinitamente grande negativo.
1.4) Infinitamente grande positivo.
1.5) Infinitamente grande positivo.
1.6) Infinitamente grande positivo.
1.7) Infinitamente grande positivo.
1.8) Infinitamente grande positivo.
1.9) Infinitamente grande positivo.
1.10) Infinitamente grande positivo.
1.11) Infinitamente grande negativo.
1.12) Infinitamente grande em módulo.
1.13) Infinitamente grande negativo.
1.14) Infinitamente grande positivo.
1.15) Infinitamente grande positivo.

2.1) Verdadeira. Por exemplo $u_n = \frac{1}{n}$

2.2) Falsa. Por exemplo $v_n = -n$

2.3) Falsa. Por exemplo $w_n = -\frac{1}{n}$

2.4) Falsa. Por exemplo $a_n = \begin{cases} n \Leftarrow n \ par \\ 1 \Leftarrow n \ impar \end{cases}$

2.5) Falsa. Por exemplo $u_n = \frac{10n}{2n+1}$

2.6) Falsa. Por exemplo $b_n = (n+20)^2$

2.7) Verdadeira. Por exemplo $d_n = -n$.

2.8) Falsa. Por exemplo $g_n = n^2$

2.9) Verdadeira. Por exemplo $r_n = -(n-10)^2$

2.10) Falsa. Por exemplo $z_n = -n$

2.11) Falsa. Por exemplo $r_n = -(n-10)^2$

3.1) $n \rangle 333$
3.4) A partir do 46 termo.
3.5) d_n ; e_n

4.1) $+\infty$
4.2) $+\infty$
4.3) $-\infty$
4.4) $+\infty$
4.5) $+\infty$
4.6) $+\infty$
4.7) $+\infty$
4.8) $-\infty$
4.9) $+\infty$
4.10) $+\infty$
4.11) ∞
4.12) ∞

5.1) $v_{24} = 2\sqrt{26}$
5.2) $n = 62499$

6.1) $u_4 = 16$
6.2) Não.
6.3) Não, porque se por exemplo fizermos $L = 21$, não existe nenhuma ordem depois da qual todos os termos da sucessão sejam superiores a L.

8.1) Não.
8.2) Sim.
8.3) Sim.
8.4) Sim.

COLÉGIO DA RAINHA SANTA ISABEL

TEMA: Sucessões

MATEMÁTICA – 12º ANO

Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são falsas.

(A) Uma sucessão crescente tende para $+\infty$.

(B) Uma sucessão não limitada superiormente tende para $+\infty$.

(C) Uma sucessão que tende para $+\infty$ é crescente.

(D) Uma sucessão que tenda para $-\infty$ é não limitada.

(E) Uma sucessão que tende para $-\infty$ pode não ser decrescente.

(F) Um infinitésimo é uma sucessão limitada.

(G) Um infinitésimo ou é uma sucessão crescente ou uma sucessão decrescente.

(H) Uma sucessão convergente é uma sucessão limitada.

(I) Uma sucessão limitada é convergente.

(J) Uma sucessão não convergente não é uma sucessão limitada.

(K) Uma sucessão que tem por limite **a** pode ter um número infinito de termos que não pertençam ao intervalo $]a-\delta\ ,\ a+\delta[$, se δ for suficientemente pequeno.

(L) Uma sucessão convergente ou é crescente ou é decrescente.

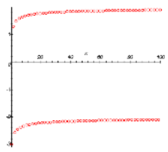
(M) Uma sucessão de termos positivos e decrescente tem por limite **0** (zero).

(N) Uma sucessão de termos positivos pode tender para um número negativo.

(O) Uma sucessão que tende para $-a$ $(a \in \mathbb{R}^+)$ tem infinitos termos negativos.

(P) Uma sucessão que tende para $m+3$, com $m \in \mathbb{R}$, tem infinitos termos positivos.

(Q) Uma sucessão limitada e não monótona não é convergente.



Ficha de Trabalho 1

Instruções

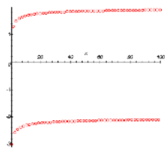
1. Mostre que são limitadas as sucessões de termo geral:
   a. $u_n = 5 - \frac{3}{n}$
   b. $x_n = \frac{2n+1}{n}$
   c. $v_n = 1 + sen(\frac{n\pi}{2})$
   d. $c_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$
   e. $e_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & se\ n \leq 8 \\ \frac{4}{n} & se\ n > 8 \end{cases}$

2. A sucessão de Fibonacci obtém-se fazendo:
   $a_1 = a_2 = 1 \qquad a_3 = a_1 + a_2 = 2 \qquad a_4 = a_2 + a_3 = 3 \qquad \ldots$
   Cada termo é a soma dos dois anteriores.
   A sucessão de Fibonacci é uma progressão aritmética? E geométrica?

3. Um estudante em férias foi para Londres e arranjou trabalho de três horas por dia durante o mês de Agosto.
   As propostas para o vencimento eram as seguintes:
   - 350 libras pagas no fim do mês;
   - trabalhar de graça nos primeiros 15 dias e no 16º receber um centésimo da libra, no 17º dia 2 centésimos da libras e assim sucessivamente, duplicando o vencimento do dia anterior até ao fim do mês.

   Qual a proposta mais vantajosa para o estudante?

4. Considere as sucessões de termo geral
   $$b_n = 3n - 1\ ;\ c_n = 4 - 3n\ ;\ d_n = \frac{5}{n+4}\ ;\ e_n = \left(\frac{11}{10}\right)^{-n}$$
   a. Calcule a ordem a partir da qual $b_n > 1000$.
   b. Prove que b_n é um infinitamente grande positivo.
   c. Mostre que c_n é um infinitamente grande negativo.
   d. Calcule a ordem a partir da qual $d_n < 0{,}1$.
   e. Algumas das sucessões são infinitésimos? Justifique.
   f. A sucessão $b_n + c_n$ é um infinitamente grande positivo? Porquê?



Ficha de Trabalho 1

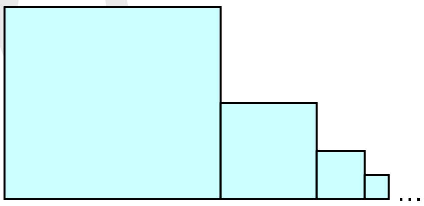
5. Sendo (a_n) e (b_n) duas progressões geométricas de razão r_1 e r_2, respectivamente, prove que $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ também é uma progressão geométrica.

   Determine a sua razão em função de r_1 e r_2.

6. Acerca de uma sucessão sabe-se que $a_1 = -1 \quad e \quad a_{n+1} = a_n - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   Pode afirmar-se que a soma, S_n, dos n primeiros termos é:

   (A) $S_n = \frac{1-n}{2}$ (B) $-\frac{n^2+n}{2}$ (C) $\frac{-1-n^2}{2}$ (D) $\frac{n^2-n}{2}$

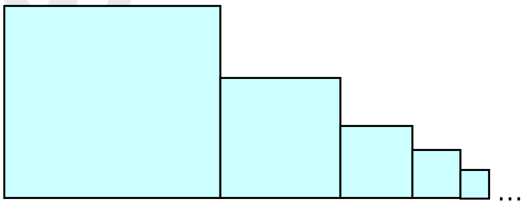
7. Seja (a_n) a sucessão cujo termo geral é dado pela área de cada um dos quadrados que se obtêm como mostra a figura.



   O lado do quadrado inicial é 3; o lado de cada quadrado é metade do lado do quadrado anterior.
   Então, o termo geral da sucessão (a_n) é:

   (A) $\frac{9}{2n}$ (B) $\frac{3}{n}$ (C) $\frac{9}{2^{n-2}}$ (D) $\frac{9}{2^{2n-2}}$

8. Observe a figura formada por quadrados.



   O lado do 1º quadrado é 27 m. O lado de cada quadrado é $\frac{3}{5}$ do lado do quadrado anterior.
   Seja (a_n) a sucessão que a cada quadrado faz corresponder a sua área. Pode afirmar-se que:

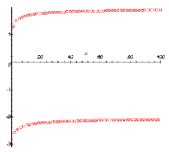
   (A) $a_n = \frac{3^{n+2}}{5^{n-1}}$ (B) $a_n = \frac{9^{3n-3}}{5^{n-1}}$ (C) $a_n = \frac{3^{n-2}}{5^{n-1}}$ (D) $a_n = \frac{3^{2n+4}}{5^{2n-2}}$

9. Definidas as sucessões pelo seu termo geral

$$a_n = 1 - 3n^2 \text{ e } b_n = \frac{3n^2+1}{n^2}$$

   Calcule:
   a. $\lim a_n$

Ficha de Trabalho 1



b. $\lim b_n$

c. $\lim \dfrac{a_n}{b_n}$

d. $\lim \dfrac{b_n}{a_n}$

10. Classifique quanto à existência e natureza do limite de cada uma das sucessões:

a. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$

b. $b_n = 5 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

c. $c_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

d. $d_n = 1 + (-1)^n .2n$

e. $v_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{3n+1}$

11. Se $u_n = 5 + \dfrac{1}{n}$ e $v_n = \dfrac{2}{n+5}$, calcule:

a. $\lim u_n$

b. $\lim v_n$

c. $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$

12. Determine:

a. $\lim (-8n)^2$

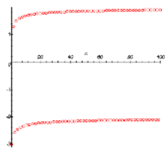
b. $\lim \left(-\dfrac{5}{8n}\right)$

c. $\lim \sqrt[3]{1-3n}$

d. $\lim \left(\dfrac{1000}{3n^2}\right)$

e. $\lim \left(10 + \dfrac{2}{3} n^5\right)$

Ficha de Trabalho 1



13. Comente cada uma das afirmações, referindo-se se se trata ou não de uma afirmação verdadeira e apresente exemplos ou contra exemplos:

   a. Uma sucessão decrescente é limitada superiormente;

   b. Uma sucessão decrescente é limitada inferiormente;

   c. Uma sucessão decrescente é convergente;

   d. Uma sucessão decrescente pode ser um infinitamente grande positivo;

   e. Uma sucessão que tende para $+\infty$ é crescente;

   f. Toda a sucessão crescente é não limitada;

   g. Toda a sucessão crescente é um infinitamente grande positivo;

   h. Todo o infinitésimo é uma sucessão monótona;

   i. Uma sucessão de termos positivos pode convergir para -0,001;

   j. Toda a sucessão que tende para $-\infty$ é decrescente;

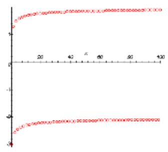
   k. Um infinitamente grande pode ser uma sucessão limitada;

   l. A soma de dois infinitésimos é um infinitésimo;

   m. Uma sucessão pode não ser limitada superiormente e não ser um infinitamente grande;

   n. Uma sucessão monótona limitada é convergente;

   o. A soma de duas sucessões divergentes não pode ser uma sucessão convergente;



Ficha de Trabalho 1

Instruções

1. Mostre que são limitadas as sucessões de termo geral:
   a. $u_n = 5 - \frac{3}{n}$
   b. $x_n = \frac{2n+1}{n}$
   c. $v_n = 1 + sen(\frac{n\pi}{2})$
   d. $c_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$
   e. $e_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & se\ n \leq 8 \\ \frac{4}{n} & se\ n > 8 \end{cases}$

2. A sucessão de Fibonacci obtém-se fazendo:

   $a_1 = a_2 = 1 \qquad a_3 = a_1 + a_2 = 2 \qquad a_4 = a_2 + a_3 = 3 \qquad \ldots$

   Cada termo é a soma dos dois anteriores.
   A sucessão de Fibonacci é uma progressão aritmética? E geométrica?

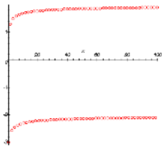
3. Um estudante em férias foi para Londres e arranjou trabalho de três horas por dia durante o mês de Agosto.
   As propostas para o vencimento eram as seguintes:
   - 350 libras pagas no fim do mês;
   - trabalhar de graça nos primeiros 15 dias e no 16º receber um centésimo da libra, no 17º dia 2 centésimos da libras e assim sucessivamente, duplicando o vencimento do dia anterior até ao fim do mês.

   Qual a proposta mais vantajosa para o estudante?

4. Considere as sucessões de termo geral

   $$b_n = 3n - 1\ ;\ c_n = 4 - 3n\ ;\ d_n = \frac{5}{n+4}\ \ ;\ e_n = \left(\frac{11}{10}\right)^{-n}$$

   a. Calcule a ordem a partir da qual $b_n > 1000$.
   b. Prove que b_n é um infinitamente grande positivo.
   c. Mostre que c_n é um infinitamente grande negativo.
   d. Calcule a ordem a partir da qual $d_n < 0{,}1$.
   e. Algumas das sucessões são infinitésimos? Justifique.
   f. A sucessão $b_n + c_n$ é um infinitamente grande positivo? Porquê?



Ficha de Trabalho 1

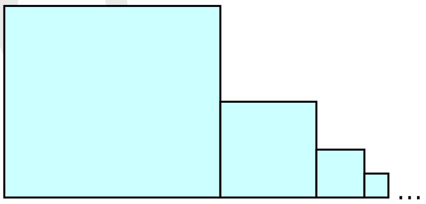
5. Sendo (a_n) e (b_n) duas progressões geométricas de razão r_1 e r_2, respectivamente, prove que $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ também é uma progressão geométrica.

   Determine a sua razão em função de r_1 e r_2.

6. Acerca de uma sucessão sabe-se que $a_1 = -1 \quad e \quad a_{n+1} = a_n - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   Pode afirmar-se que a soma, S_n, dos n primeiros termos é:

   (A) $S_n = \dfrac{1-n}{2}$ (B) $-\dfrac{n^2+n}{2}$ (C) $\dfrac{-1-n^2}{2}$ (D) $\dfrac{n^2-n}{2}$

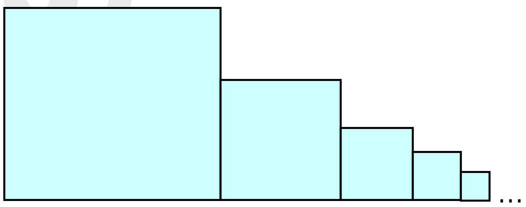
7. Seja (a_n) a sucessão cujo termo geral é dado pela área de cada um dos quadrados que se obtêm como mostra a figura.

   O lado do quadrado inicial é 3; o lado de cada quadrado é metade do lado do quadrado anterior.
   Então, o termo geral da sucessão (a_n) é:

   (A) $\dfrac{9}{2n}$ (B) $\dfrac{3}{n}$ (C) $\dfrac{9}{2^{n-2}}$ (D) $\dfrac{9}{2^{2n-2}}$

8. Observe a figura formada por quadrados.

   O lado do 1º quadrado é 27 m. O lado de cada quadrado é $\dfrac{3}{5}$ do lado do quadrado anterior.

   Seja (a_n) a sucessão que a cada quadrado faz corresponder a sua área. Pode afirmar-se que:

   (A) $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^{n-1}}$ (B) $a_n = \dfrac{9^{3n-3}}{5^{n-1}}$ (C) $a_n = \dfrac{3^{n-2}}{5^{n-1}}$ (D) $a_n = \dfrac{3^{2n+4}}{5^{2n-2}}$

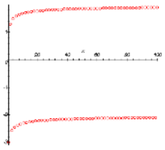
9. Definidas as sucessões pelo seu termo geral

   $$a_n = 1 - 3n^2 \text{ e } b_n = \frac{3n^2+1}{n^2}$$

   Calcule:

   a. $\lim a_n$

Ficha de Trabalho 1



b. $\lim b_n$

c. $\lim \dfrac{a_n}{b_n}$

d. $\lim \dfrac{b_n}{a_n}$

10. Classifique quanto à existência e natureza do limite de cada uma das sucessões:

a. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$

b. $b_n = 5 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

c. $c_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

d. $d_n = 1 + (-1)^n .2n$

e. $v_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{3n+1}$

11. Se $u_n = 5 + \dfrac{1}{n}$ e $v_n = \dfrac{2}{n+5}$, calcule:

a. $\lim u_n$

b. $\lim v_n$

c. $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$

12. Determine:

a. $\lim (-8n)^2$

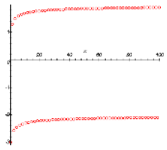
b. $\lim \left(-\dfrac{5}{8n}\right)$

c. $\lim \sqrt[3]{1-3n}$

d. $\lim \left(\dfrac{1000}{3n^2}\right)$

e. $\lim \left(10 + \dfrac{2}{3}n^5\right)$

Ficha de Trabalho 1



13. Comente cada uma das afirmações, referindo-se se se trata ou não de uma afirmação verdadeira e apresente exemplos ou contra exemplos:

   a. Uma sucessão decrescente é limitada superiormente;

   b. Uma sucessão decrescente é limitada inferiormente;

   c. Uma sucessão decrescente é convergente;

   d. Uma sucessão decrescente pode ser um infinitamente grande positivo;

   e. Uma sucessão que tende para $+\infty$ é crescente;

   f. Toda a sucessão crescente é não limitada;

   g. Toda a sucessão crescente é um infinitamente grande positivo;

   h. Todo o infinitésimo é uma sucessão monótona;

   i. Uma sucessão de termos positivos pode convergir para -0,001;

   j. Toda a sucessão que tende para $-\infty$ é decrescente;

   k. Um infinitamente grande pode ser uma sucessão limitada;

   l. A soma de dois infinitésimos é um infinitésimo;

   m. Uma sucessão pode não ser limitada superiormente e não ser um infinitamente grande;

   n. Uma sucessão monótona limitada é convergente;

   o. A soma de duas sucessões divergentes não pode ser uma sucessão convergente;