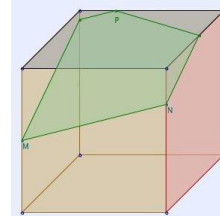
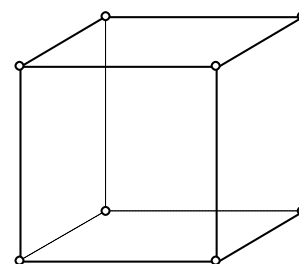
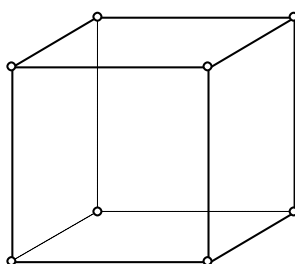
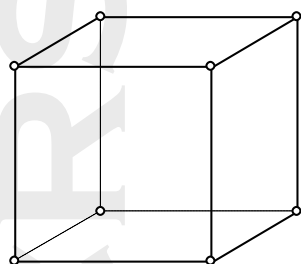


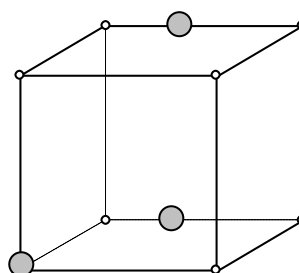
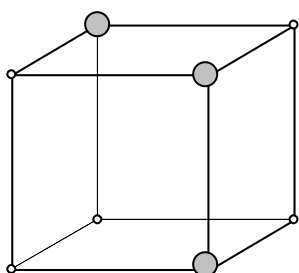
- Intersecção de sólidos por um plano dado – Secções

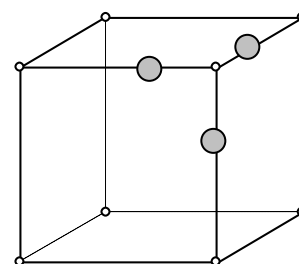
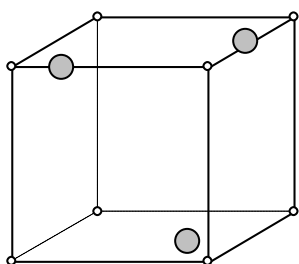


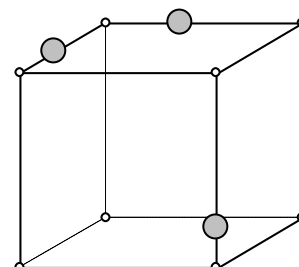
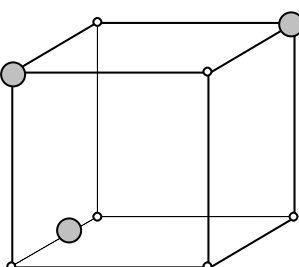
1. Desenhe as seguintes secções, identificando sempre qual a figura geométrica que resulta:
- a. As que resultam da intersecção de um plano perpendicular a duas faces e que passa pelos pontos médios das arestas dessas faces



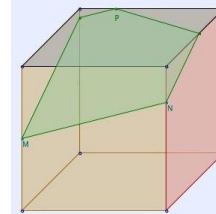
- b. As que resultam da intersecção dos planos identificados pelos pontos a cheio:



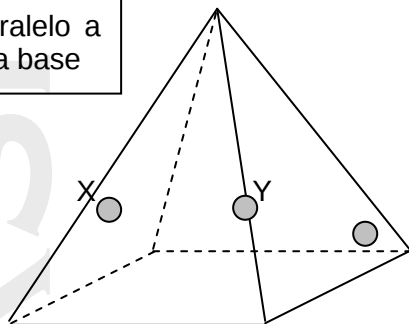


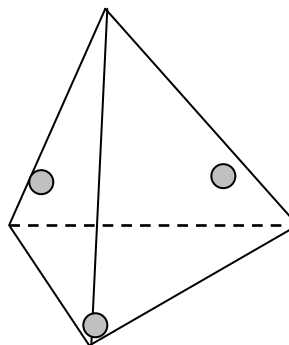


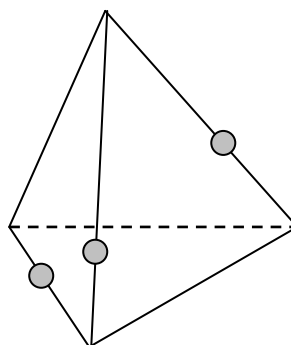
- Intersecção de sólidos por um plano dado – Secções



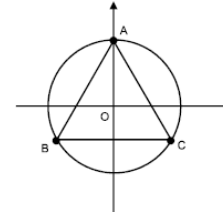
Com $[XY]$ paralelo a uma aresta da base



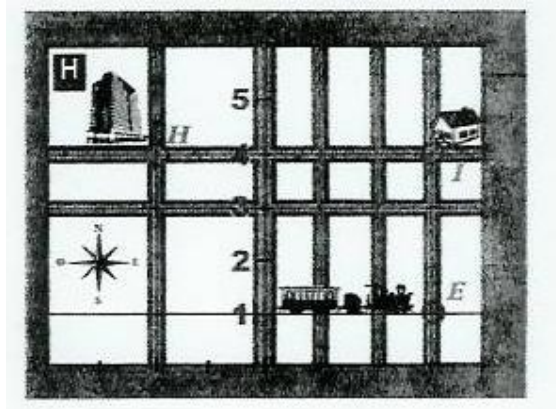




○ Referenciais no Plano

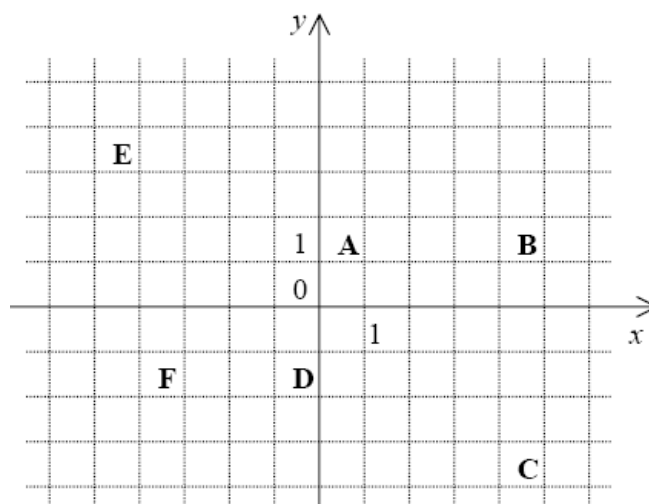


1. A figura é um esquema que representa parte de uma cidade onde se fixou um referencial onde cada unidade representa 100m. O ponto H representa o hospital, o ponto E a estação ferroviária e o ponto I a casa da Isabel. O caminho de ferro mantém-se paralelo ao eixo das abcissas.



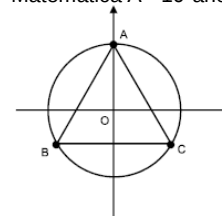
- Localiza o hospital, através das coordenadas de H.
- À medida que o comboio passa, a sua posição em cada instante mantém invariável uma das coordenadas. Qual?
- Define, através de uma condição, os pontos que representam a linha de caminho de ferro.
- A rua Sta. Eulália é perpendicular à linha férrea e passa pela estação ferroviária. Define-a por uma condição.
- Quais são as coordenadas da casa da Isabel, sabendo que vive no cruzamento da Rua de Sta. Eulália com a rua do hospital?
- Sabe-se que o João mora a norte da linha férrea. Qual a condição que garante esta situação?

2. Considera o referencial cartesiano do plano da figura:

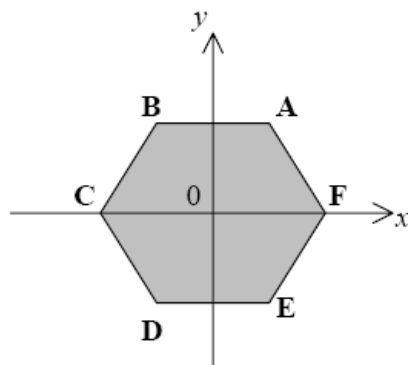


- Escreve as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E e F.
- Escreve a condição que representa a recta AO.
- Escreve a condição que representa a recta vertical que contém o ponto médio do segmento [AB].
- Determina as coordenadas do ponto A', simétrico de A relativamente à recta de equação $y = -3$.
- Determina as coordenadas do ponto F', simétrico de F relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares.
- Determina o perímetro do triângulo [ABC].

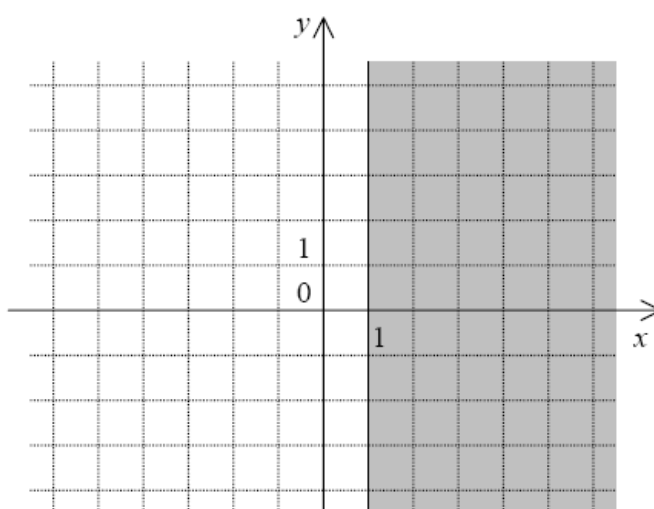
- Referenciais no Plano



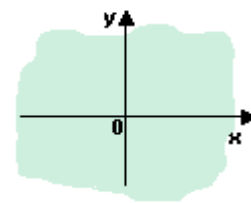
3. Um hexágono regular pode ser dividido em seis triângulos equiláteros. Quais são as coordenadas dos vértices do hexágono regular [ABCDEF] da figura, que tem lado igual a 2?



4. Considera o referencial cartesiano do plano da figura:
- Caracteriza por uma condição o conjunto de pontos assinalado a sombreado.
 - Representa geometricamente no mesmo referencial, o conjunto de pontos representado pela condição $y \geq 2$.
 - Representa geometricamente e analiticamente o conjunto de pontos que verificam as duas condições anteriores.
 - Representa geometricamente e analiticamente o conjunto de pontos que verificam pelo menos uma das duas condições anteriores.



- Secções de Sólidos
- Áreas e volumes
- Conjuntos de pontos do plano definidos por condições.



1. A figura representa um prisma recto em que $[ABCD]$ é um trapézio rectângulo.

1.1. Indique:

1.1.1. Duas rectas concorrentes, não perpendiculares.

1.1.2. Uma recta perpendicular ao plano ADH

1.1.3. Duas rectas concorrentes, paralelas ao plano EFG .

1.2. Indique a posição relativa de:

1.2.1. EC e AEG .

1.2.2. ABF e BCG .

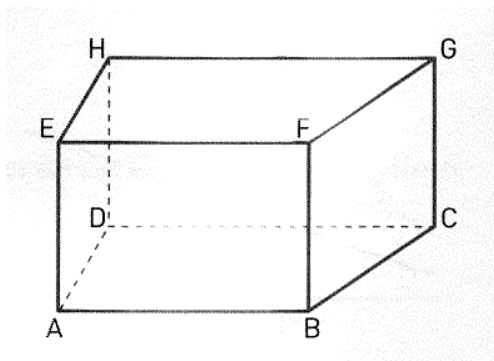
1.3. Justifique cada uma das seguintes afirmações:

1.3.1. “ DH e FB são coplanares.”

1.3.2. “ HF é paralela a ABC .”

1.4. Indique as diagonais espaciais do sólido não coplanares com $[EF]$.

1.5. De entre os planos que se podem definir contendo apenas três dos vértices do prisma, indique os que contêm o ponto B .



2. Das seguintes afirmações, indique, justificando, quais as verdadeiras e quais as falsas.

2.1. Quaisquer duas arestas de um cubo definem um plano.

2.2. Se uma recta for paralela a um plano, então qualquer recta que lhe seja perpendicular, será perpendicular ao plano dado.

2.3. Se uma recta é paralela a um plano, então é paralela a todas as rectas contidas nesse plano.

2.4. Se dois planos forem perpendiculares, então qualquer recta secante a um também será secante ao outro.

2.5. Duas rectas sem pontos comuns são paralelas.

2.6. Duas arestas coplanares de uma pirâmide nunca são paralelas.

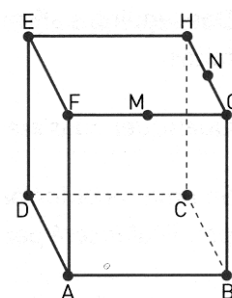
2.7. Existe um único sólido platónico cujo dual é ele próprio.

3. A figura representa um cubo. M e N são os pontos médios das respectivas arestas.

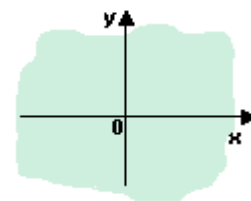
3.1. Desenhe a secção produzida no cubo pelo plano que contém os pontos M e N e é paralelo ao plano ACH .

3.2. Calcule a área da secção da alínea anterior sabendo que se trata de um cubo com volume 64 cm^3 e os pontos M e N são pontos médios dos segmentos de recta $[FG]$ e $[HG]$, respectivamente.

3.3. Determine o volume do prisma triangular que resulta do corte efectuado no cubo pelo plano da alínea 3.1..

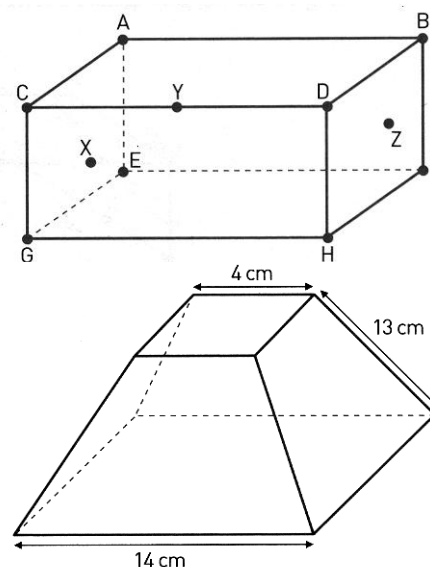


- Secções de Sólidos
- Áreas e volumes
- Conjuntos de pontos do plano definidos por condições.



4. Descreva, desenhe e identifique a secção que se obtém quando se intersecta o paralelepípedo representado com o plano XYZ.

NOTA: $X \in [CDGH]$, $Y \in [CD]$ e $Z \in [ABEF]$.



5. A figura representa um tronco de uma pirâmide quadrangular regular.

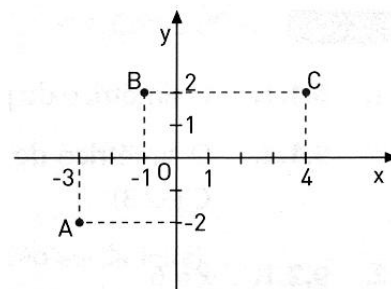
Atendendo aos dados, calcule:

- 5.1. A área lateral do sólido.
5.2. A área total do sólido.

6. Calcule o volume da esfera circunscrita a um cubo de 12 cm de aresta.

7. No referencial cartesiano ortogonal e monométrico da figura estão representados 3 dos vértices de um trapézio isósceles [ABCD].

- 7.1. Determine as coordenadas do vértice D.
7.2. Calcule a distância entre os pontos A e B.
7.3. Tomando para unidade o centímetro, determine a área e o perímetro do trapézio.
7.4. Determine uma condição que define o lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e de C.
7.5. Escreva uma condição que defina a região do plano compreendida entre as bases do trapézio, incluindo a fronteira.



8. Num referencial cartesiano do plano são dados os pontos A(2,-1), B(6,1) e C(-3,2).

- 8.1. Indique:

- 8.1.1. O simétrico de A em relação à origem do referencial.
8.1.2. O simétrico de C em relação à recta de equação $y = -x$.

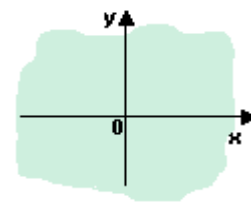
- 8.2. Escreva a equação que define:

- 8.2.1. A recta vertical que passa por B.
8.2.2. A recta paralela ao eixo Ox e que contém A.

- 8.3. Determine a equação da circunferência de centro C e de diâmetro $\overline{AB}$.

- 8.4. Determine os pontos de intersecção da circunferência com o eixo dos xx.

- Secções de Sólidos
- Áreas e volumes
- Conjuntos de pontos do plano definidos por condições.



9. Considere a circunferência de equação $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y + 2)^2 = 16$.

9.1. Indique o centro e o raio da circunferência.

9.2. Que posição tem o ponto P (2,-3) em relação à circunferência?

9.3. Defina analiticamente as rectas horizontais tangentes à circunferência.

9.4. Escreva uma condição que defina o círculo concêntrico com a circunferência dada e de raio $\sqrt{7}$.

10. Identifique o conjunto de pontos do plano definido por cada uma das seguintes condições:

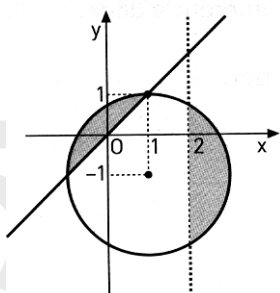
10.1. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$

10.2. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 29 = 0$

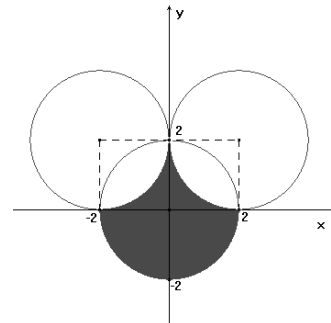
10.3. $x^2 + y^2 - 6x + 10 = 0$

11. Defina analiticamente o conjunto de pontos assinalado nas figuras.

11.1.



11.2.



12. Represente, num referencial cartesiano do plano, o conjunto de pontos definido pela condição: $x^2 + y^2 > 9 \wedge |x| \leq 2 \wedge -3 \leq y \leq 4$

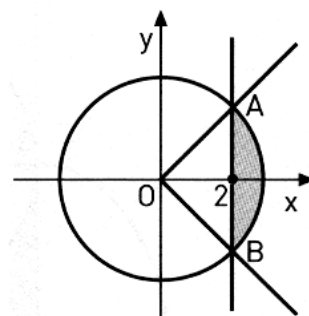
13. No referencial ortonormado da figura, os pontos A e B pertencem a uma circunferência centrada na origem. O ponto A pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares e o ponto B pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

13.1. Escreva uma equação da circunferência.

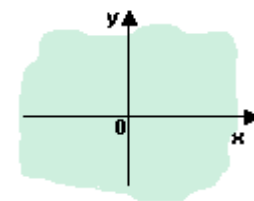
13.2. Defina por uma condição a região a sombreado.

13.3. Supondo que a unidade de comprimento é o centímetro, calcule o valor aproximado às centésimas da área da região a sombreado.

(AOB é um sector circular que corresponde a um quarto de círculo)

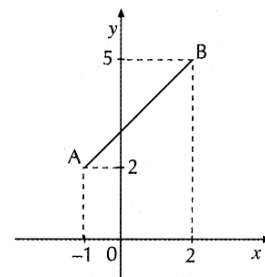


- Secções de Sólidos
- Áreas e volumes
- Conjuntos de pontos do plano definidos por condições.



14. Defina por uma condição a projecção ortogonal do segmento de recta $[AB]$, representado no referencial o.m. da figura, sobre:

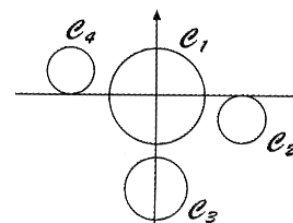
- 14.1.** a recta $y = 1$.
14.2. o eixo da ordenadas.



15. Em relação a um referencial ortogonal e monométrico, considere os pontos $A(3, 2, 1)$, $B(1, 0, 1)$ e $C(1, 1, 2)$.

- 15.1.** Calcule o perímetro do triângulo $[ABC]$.
15.2. Verifique se o triângulo é rectângulo. Justifique.

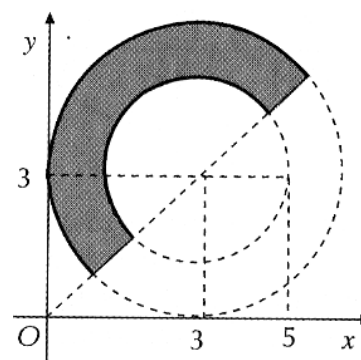
16. Faça corresponder a cada uma das circunferências representadas na figura uma das equações:



- I. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 1$
 II. $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 1$
 III. $x^2 + y^2 = 4$
 IV. $x^2 + (y + 4)^2 = 2$

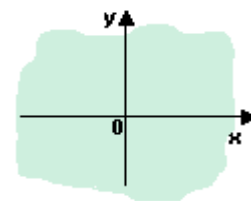
17. Observe a figura:

Defina a zona sombreada através de uma condição.



18. Averigüe se o ponto $P(-1;8)$ pertence à coroa circular $9 \leq (x+3)^2 + (y-5)^2 \leq 25$.

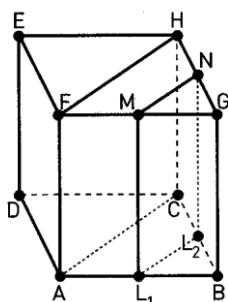
- Secções de Sólidos
- Áreas e volumes
- Conjuntos de pontos do plano definidos por condições.



Soluções

- 1.1.1. EF e FG, por exemplo. 1.1.2. AB, por exemplo. 1.1.3. AD e AB, por exemplo.
 1.2.1. EC é aposta ao plano AEG. 1.2.2. ABF e BCG 1.4. [AG] e [BH] 1.5. BDE; BDG; EGB.
 2.1. a 2.6. falsas 2.7. verdadeira 2.8. falsa

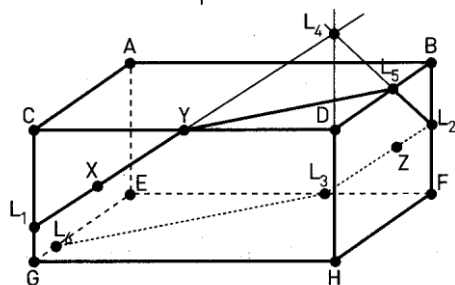
3.1.



3.2. $20+16\sqrt{2}$

3.3. 8 cm^3

4.



5.1. Área lateral do sólido = 432 cm^2

5.2. Área total = 644 cm^2

6. $864\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$ ($4701,36... \text{ cm}^3$)

7.1. D (6,-2) 7.2. $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ 7.3. $P = (4\sqrt{5}+14) \text{ cm}$ e $A_T = 28 \text{ cm}^2$ 7.4. $14x+8y-7=0$ 7.5. $|y| \leq 2$

8.1.1. $A'(-2,1)$ 8.1.2. $C'(-2,3)$ 8.2.1. $x=6$ 8.2.2. $y=-1$ 8.3. $(x+3)^2+(y-2)^2=5$ 8.4. (-2,0) e (-4,0)

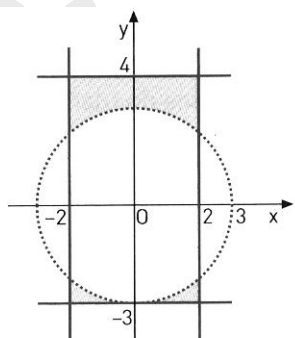
9.1 Centro C $\left(\frac{5}{2}; -2\right)$ e raio 4 9.2. $\overline{PC} = \frac{\sqrt{5}}{2} < 4$ como $\overline{PC} < r$, então P é interior à circunferência.

9.3. $y=2$ e $y=-6$ 9.4. O círculo é definido por $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y+2)^2 \leq 7$

10.1 Circunferência C $(-1;2)$ e $r=\sqrt{3}$ 10.2. Ponto de coordenadas (2;-5) 10.3. Conjunto vazio

11.1. $(x-1)^2+(y+1)^2 \leq 4 \wedge (y \geq x \vee x > 2)$ 11.2. $(x-2)^2+(y-2)^2 \geq 4 \wedge (x+2)^2+(y-2)^2 \geq 4 \wedge x^2+y^2 \leq 4$

12.



13.1. $x^2+y^2=8$ 13.2. $x^2+y^2 \leq 8 \wedge x \geq 2$ 13.3. $2,28 \text{ cm}^2$

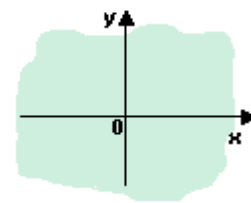
14.1. $y=1 \wedge -1 \leq x \leq 2$ 14.2. $x=0 \wedge 2 \leq y \leq 5$

15.1. $3\sqrt{2}+\sqrt{6}$ 15.2. É. 16. $C_1 - \text{III}; C_2 - \text{I}; C_3 - \text{IV}; C_4 - \text{II}$

17. $4 \leq (x-3)^2+(y-3)^2 \leq 9 \wedge y > x$

18. Pertence

- Conjuntos definidos por Condições



1. Represente num referencial cartesiano do plano o conjunto de pontos definidos pelas seguintes condições:

1.1. $x < -1$

1.2. $y > 1$

1.3. $x \leq 1 \wedge y \geq 2$

1.4. $x > 1 \vee x < -2$

1.5. $x \leq 0 \wedge y > -2$

1.6. $y \leq 3 \wedge y \geq -3$

1.7. $(y \leq 3 \wedge y \geq -3) \wedge (x \leq 1 \wedge x \geq -1)$

1.8. $(x < 2 \wedge x > -2) \wedge (y < 2 \wedge y > -2)$

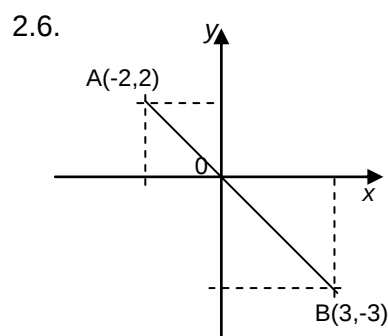
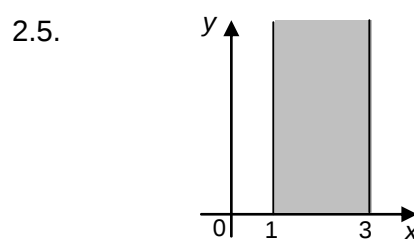
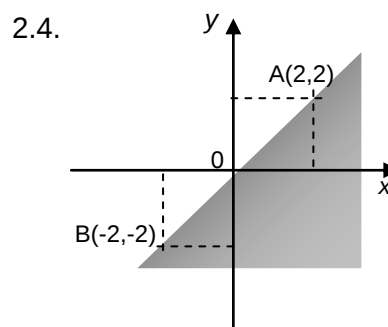
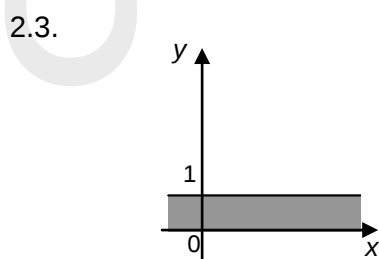
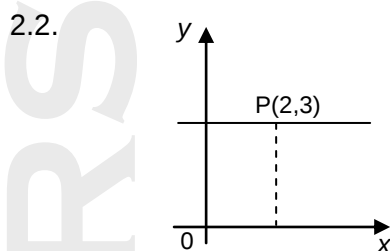
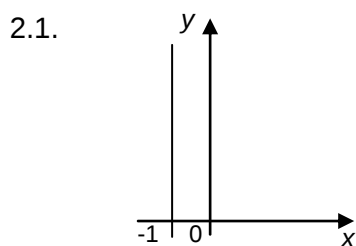
1.9. $y \geq 0 \wedge x \leq 3 \wedge y \leq x$

1.10. $y < x \wedge y > -x \wedge y \leq 3$

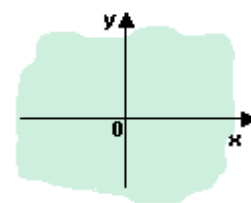
1.11. $y < x \wedge y < -x \wedge y > -2$

1.12. $y \leq 0 \wedge y \geq -2 \wedge x = 4$

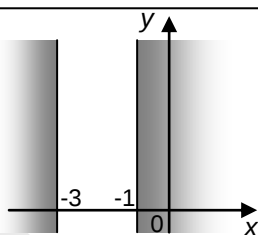
2. Defina por condições os conjuntos de pontos representados nas figuras seguintes:



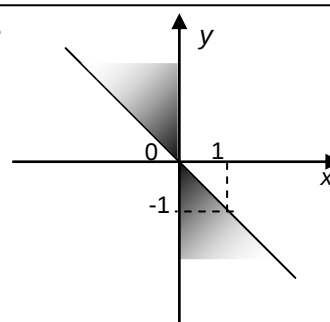
- Conjuntos definidos por Condições



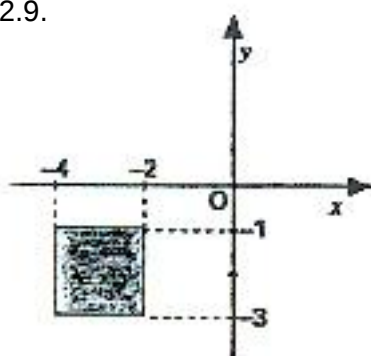
2.7.



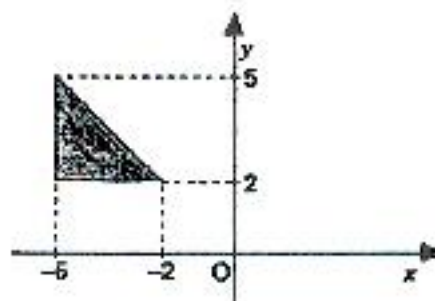
2.8.



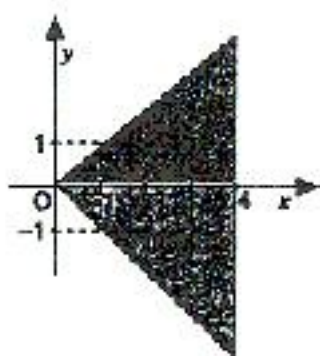
2.9.



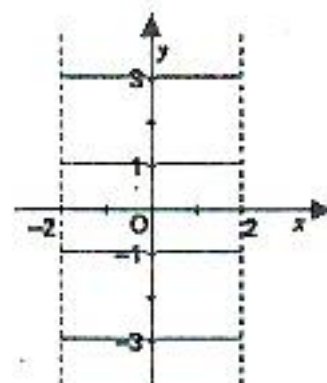
2.10.



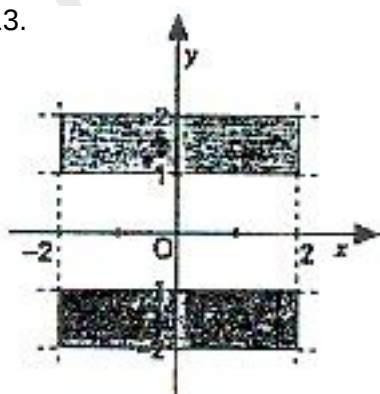
2.11.



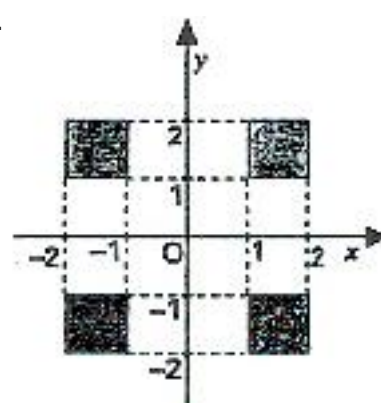
2.12.



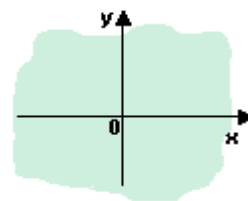
2.13.



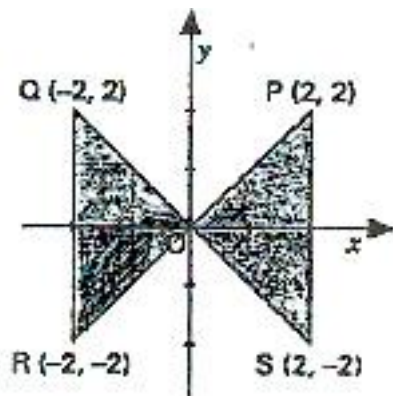
2.14.



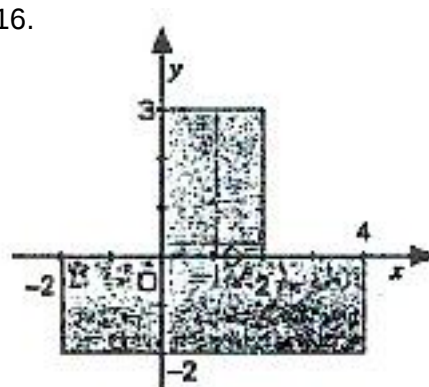
- Conjuntos definidos por Condições



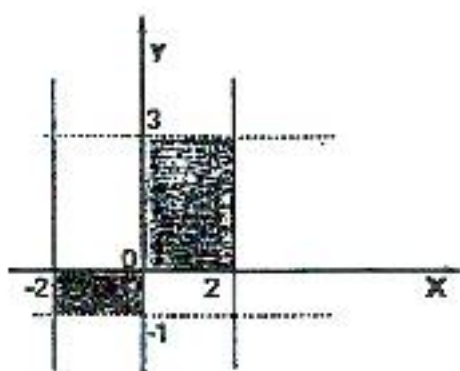
2.15.



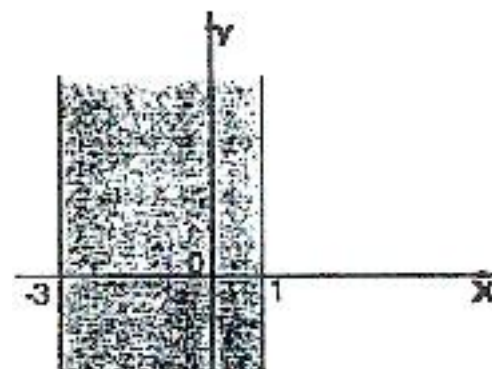
2.16.



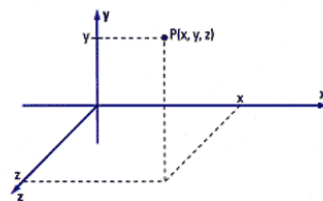
2.17.



2.18.

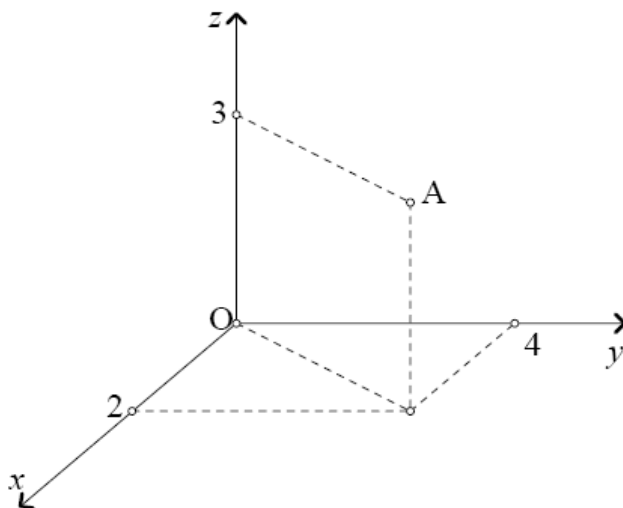


○ Referenciais no Espaço

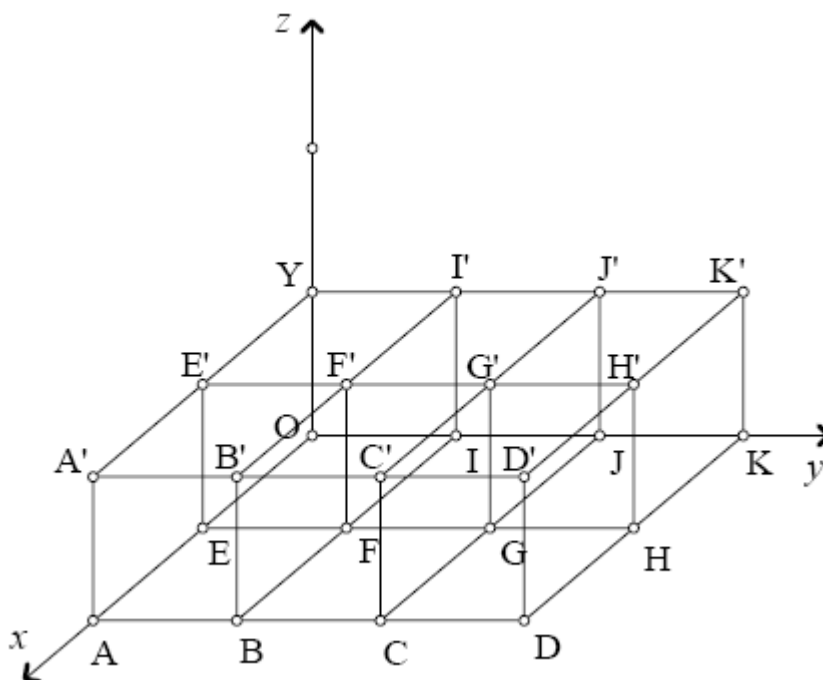


1. Considera o ponto A representado no referencial ortonormado e indica as suas coordenadas.

A(; ;)



2. Observa a seguinte figura:



Indica as coordenadas de cada um dos pontos, considerando que cada cubo tem aresta 2 unidades.

A (; ;) A' (; ;) E (; ;) E' (; ;) I (; ;) I' (; ;)

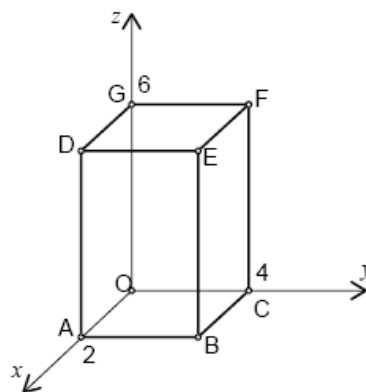
B (; ;) B' (; ;) F (; ;) F' (; ;) J (; ;) J' (; ;)

C (; ;) C' (; ;) G (; ;) G' (; ;) K (; ;) K' (; ;)

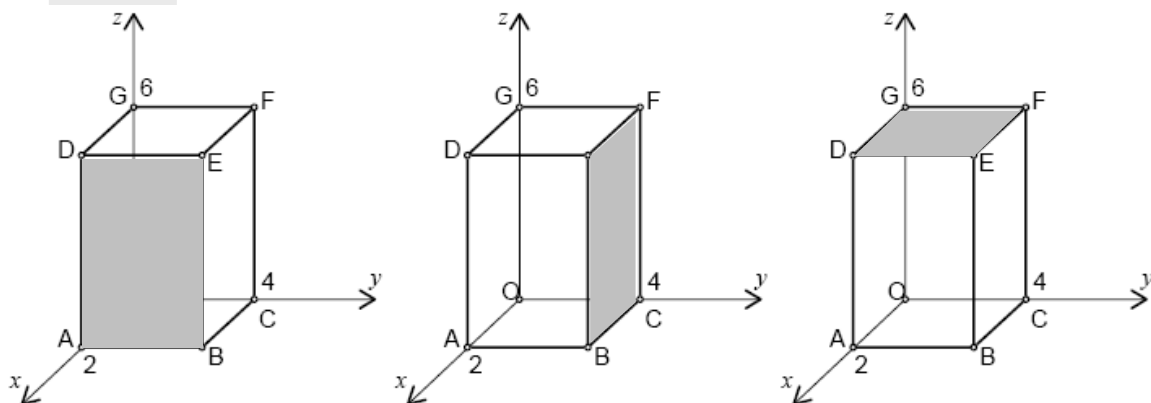
D (; ;) D' (; ;) H (; ;) H' (; ;) O (; ;) Y (; ;)

3. Observa o paralelepípedo, ao lado:

3.1. Indica as coordenadas de cada vértice.



Considera os planos ABD, BCF e DEF, ilustrados na figura seguinte:



Atendendo aos pontos que pertencem a cada um dos planos indica uma condição que defina:

- O plano ABD;
- O plano BCF;
- O plano DEF.

3.2. De acordo com a alínea anterior podes concluir:

3.2.1. Os pontos de um plano perpendicular ao eixo Ox têm a mesma _____.

Estes planos definem-se por uma condição _____.

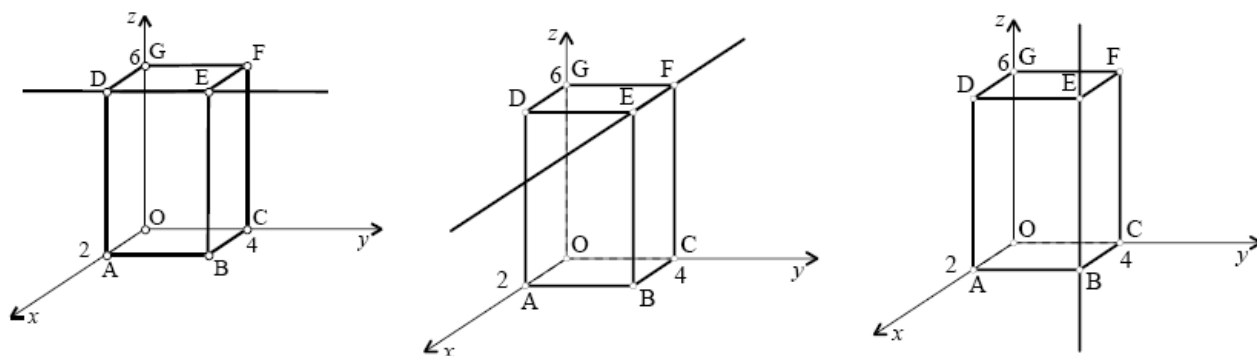
3.2.2. Os pontos de um plano perpendicular ao eixo Oy têm a mesma _____.

Estes planos definem-se por uma condição _____.

3.2.3. Os pontos de um plano perpendicular ao eixo Oz têm a mesma _____.

Estes planos definem-se por uma condição _____.

3.3. Considera as rectas DE, EF e BE ilustradas na seguinte figura:



Atendendo aos pontos que pertencem a cada uma das rectas indica uma condição que defina:

3.3.1. A recta DE; _____

3.3.2. A recta EF; _____

3.3.3. A recta BE. _____

3.4. De acordo com a alínea anterior podemos concluir que:

3.4.1. Os pontos de uma recta paralela ao eixo Ox têm a mesma _____ e a mesma _____.

Estas rectas definem-se por uma condição do tipo _____.

3.4.2. Os pontos de uma recta paralela ao eixo Oy têm a mesma _____ e a mesma _____.

Estas rectas definem-se por uma condição do tipo _____.

3.4.3. Os pontos de uma recta paralela ao eixo Oz têm a mesma _____ e a mesma _____.

Estas rectas definem-se por uma condição do tipo _____.

4. Observa o paralelepípedo da figura ao lado:

4.1. Quais as coordenadas dos vértices A, B, C, D, E, F e H?

4.2. Indica uma condição que defina:

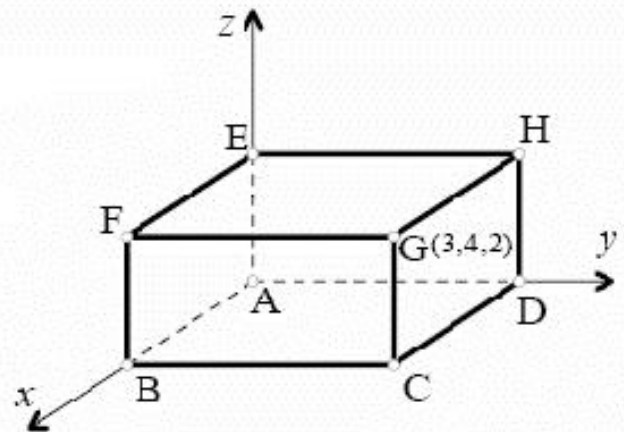
4.2.1. O plano FEH; _____

4.2.2. A recta EH; _____

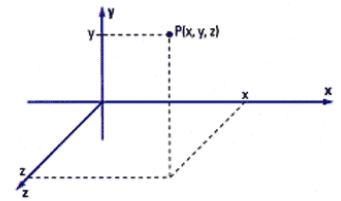
4.2.3. O plano ABE; _____

4.2.4. A recta FB; _____

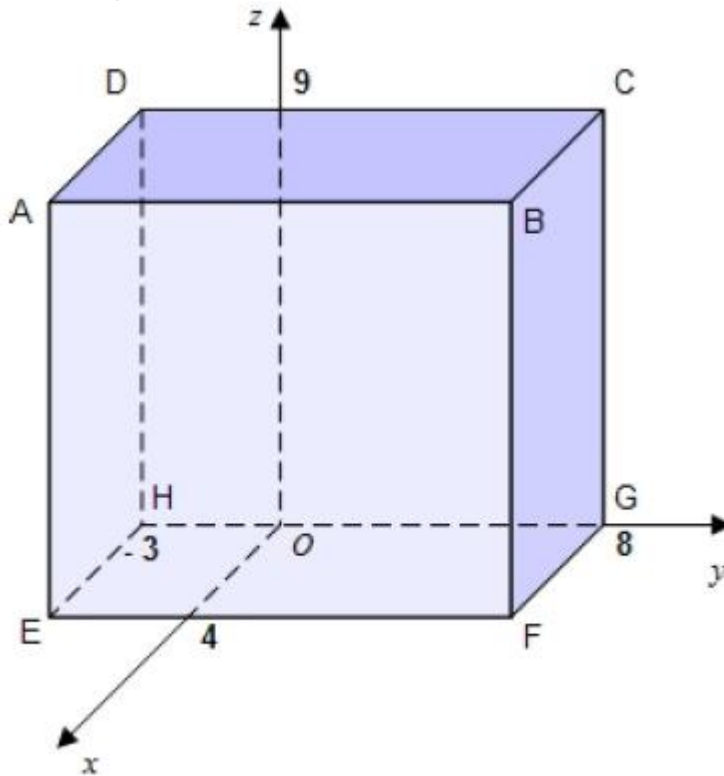
4.2.5. O plano CDH. _____



- Coordenadas no Espaço.
- Simetrias.
- Conjuntos e condições no plano

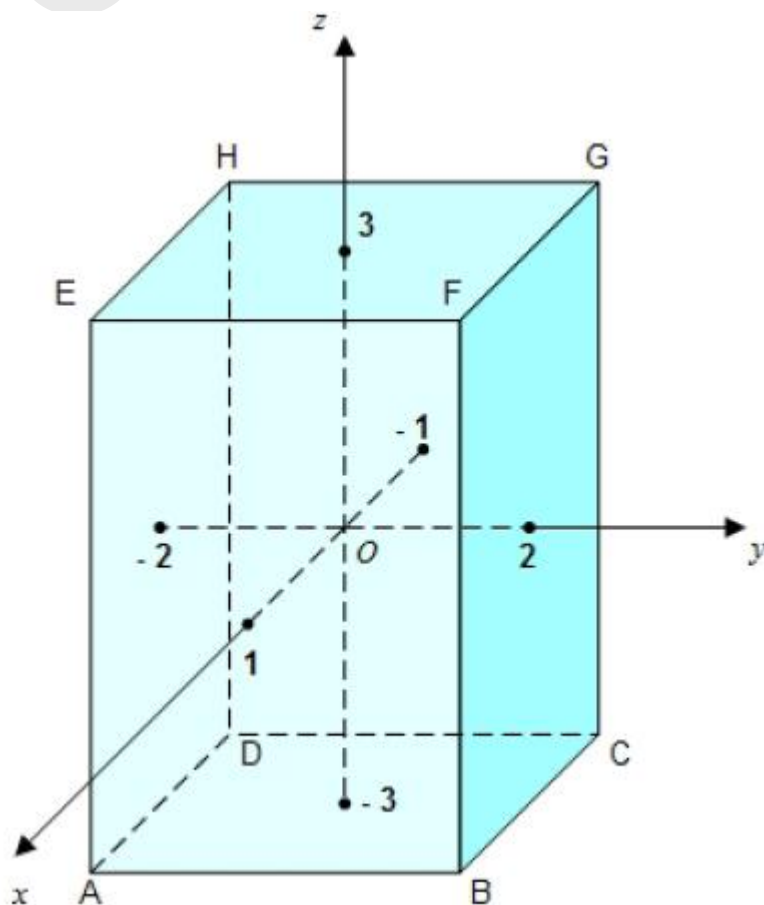


1. Na figura [ABCDEFGH] é um paralelepípedo.



- 1.1 Escreva as coordenadas dos vértices do paralelepípedo.
- 1.2 Escreva uma condição que represente cada um dos seguintes conjuntos de pontos:
 - a) plano ABF;
 - b) plano EGH;
 - c) recta BC;
 - d) recta CG;
 - e) segmento de recta [AB];
 - f) secção feita por um corte de um plano perpendicular ao eixo Oy e que contém o ponto médio da aresta [HG];
 - g) o paralelepípedo [ABCDEFGH].
- 1.3 Calcule a área do paralelepípedo [ABCDEFGH].
- 1.4 Calcule o volume do paralelepípedo [ABCDEFGH].

2. Considere a figura seguinte. O paralelepípedo é simétrico relativamente aos planos coordenados. O vértice F tem de coordenadas (1, 2, 3).



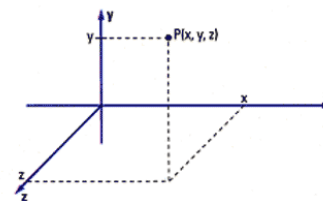
2.1 Observe a representação e indique as coordenadas do ponto:

- simétrico de F em relação ao eixo Oy;
- simétrico de F em relação ao eixo Ox;
- simétrico de F em relação ao eixo Oz;
- simétrico de F em relação à origem O;
- simétrico de F em relação ao plano xOy;
- simétrico de F em relação ao plano xOz;
- simétrico de F em relação ao plano yOz.

2.2 Considere um ponto P de coordenadas (a, b, c). Indique as coordenadas do ponto:

- simétrico de P em relação ao eixo Oy;
- simétrico de P em relação ao eixo Ox;
- simétrico de P em relação ao eixo Oz;
- simétrico de P em relação à origem O;
- simétrico de P em relação ao plano xOy;
- simétrico de P em relação ao plano xOz;
- simétrico de P em relação ao plano yOz.

○ Referenciais no Espaço



1. Considere o referencial cartesiano ortonormado do espaço da figura.

1.1. Defina pelas suas coordenadas cada um dos pontos assinalados na figura.

1.2. Indique as coordenadas do:

1.2.1. simétrico de C em relação à origem do referencial.

1.2.2. simétrico de A em relação ao eixo das cotas.

1.2.3. simétrico de F em relação ao plano yOz.

1.3. Determine a condição que define:

1.3.1. a recta que contém C e é perpendicular a xOy.

1.3.2. a recta que contém F e é paralela a Ox.

1.3.3. o plano que contém E e é perpendicular a Oy.

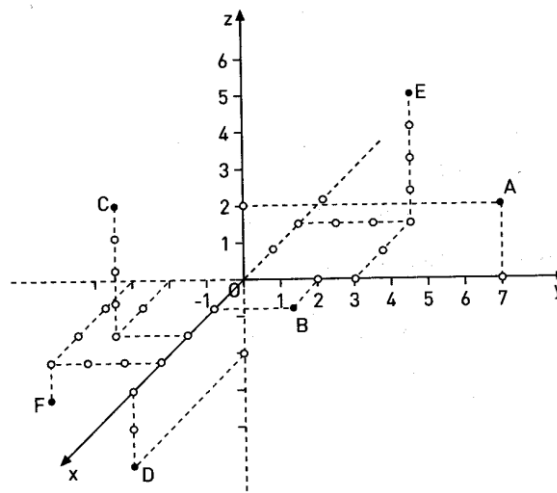
1.3.4. o plano que contém B e é paralelo a yOz.

1.4. Determine a equação da superfície esférica tal que:

- o centro é o simétrico de D em relação ao plano xOy;

- o ponto B pertence a essa superfície esférica.

1.5. Defina por uma condição a esfera de centro na origem do referencial e raio $\overline{OF}$.



2. Qual é o lugar geométrico definido por cada uma das seguintes condições?

2.6. $x = 5$:

2.6.1. no plano;

2.6.2. no espaço;

2.7. $y = 2$:

2.7.1. no plano;

2.7.2. no espaço;

2.8. $x = 0 \wedge y = 0$:

2.8.1. no plano;

2.8.2. no espaço.

3. Um paralelepípedo está representado num referencial o.m., de modo que os planos coordenados sejam planos de simetria. Se $A(a, b, c)$ é um dos vértices, quais são as coordenadas dos outros vértices?

4. Observe ao lado figura e:

4.1. Indique as coordenadas dos vértices do sólido;

4.2. Escreva uma equação dos planos que contêm as faces:

4.2.1. [IJKL];

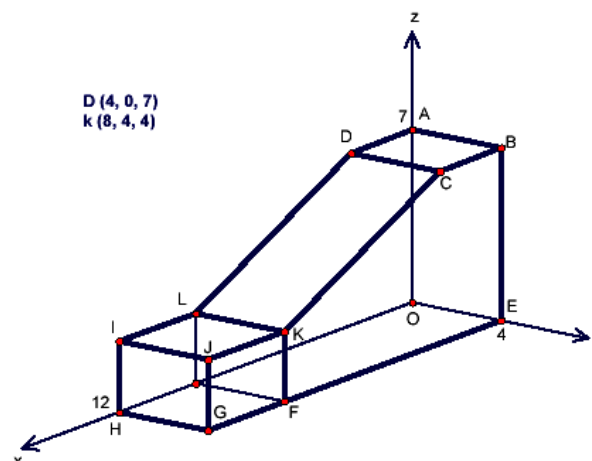
4.2.2. [CBEF];

4.2.3. [IJGH];

4.3. Diga de acordo com os dados da figura, qual é a recta de intersecção dos planos α e β de equações:

4.3.1. $\alpha : z = 7$ e $\beta : y = 0$;

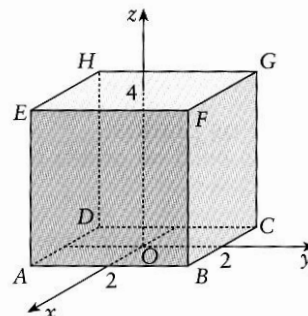
4.3.2. $\alpha : z = 0$ e $\beta : x = 0$.



5. Uma aresta de um paralelepípedo tem como extremos os pontos $(0, 0, 0)$ e $(3, 0, 0)$. Outra das arestas tem extremos em $(0, 0, 0)$ e $(0, 5, 0)$ e uma terceira tem $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, 2)$ como extremos.
Faça um esboço do sólido e indique as coordenadas dos outros quatro vértices do paralelepípedo.

6. Na figura, o referencial o.m. $Oxyz$ tem origem no centro da face $[ABCD]$ do cubo de aresta 4. Defina através de uma condição em $\mathbb{R}^3$:

- 6.1. A recta EF ;
- 6.2. A aresta $[FG]$;
- 6.3. A face $[ABFE]$.



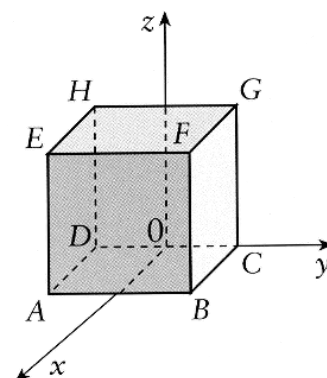
7. Defina analiticamente:

- 7.1. o plano perpendicular ao eixo Ox e que contém o ponto $(-2, 0, 0)$;
- 7.2. o plano perpendicular ao eixo Oz e que contém o ponto $(0, 0, -10)$;
- 7.3. o plano perpendicular ao eixo Oy e que contém o ponto $(3, -5, 4)$;
- 7.4. o plano que contém o ponto $(2, 3, 4)$ e é paralelo ao plano xOy ;
- 7.5. a recta paralela a Oz e que contém o ponto $(-4, 2, 3)$;
- 7.6. a recta paralela ao eixo Oy e que contém o ponto $\left(\frac{1}{3}, 5, 2\right)$.

8. Considere o cubo representado na figura em referencial $Oxyz$, cuja unidade é o centímetro.

- A aresta do cubo mede 4 cm.
- A origem do referencial é um ponto da aresta $[DC]$.
- O vértice F tem de coordenadas $(4, 2, 4)$.

- 8.1. Determine as coordenadas dos restantes vértices do cubo.
- 8.2. Determine as coordenadas dos simétricos dos pontos E e C relativamente:
 - 8.2.1. ao eixo Oy ;
 - 8.2.2. ao plano xOy .
- 8.3. Determine o comprimento da diagonal espacial do cubo.
- 8.4. Determine a área do triângulo $[ABG]$.



9. Um ponto A tem coordenadas $\left(-2, \sqrt{2}, -\frac{1}{5}\right)$.

- 9.1. Qual é a distância de A a cada um dos planos coordenados?
- 9.2. e a cada um dos eixos coordenados?

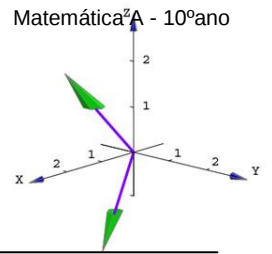
Soluções:

1.1 $A(0,7,2)$; $B(1,2,0)$; $C(2,-2,4)$; $D(4,0,-2)$; $E(-2,3,4)$; $F(3,-3,-1)$; $O(0,0,0)$ 1.2.1 $(-2,2,-4)$ 1.2.2 $(0,-7,2)$ 1.2.3 $(-3,-3,-1)$ 1.3.1 $x=2 \wedge y=-1$ 1.3.2 $y=-3 \wedge z=-1$ 1.3.3 $y=3$ 1.3.4 $x=1$ 1.4 O simétrico do ponto D em relação ao plano xOy é o ponto $P(4,0,2)$. P é o centro da superfície esférica. Como B pertence à superfície esférica, então o raio será igual a PB .

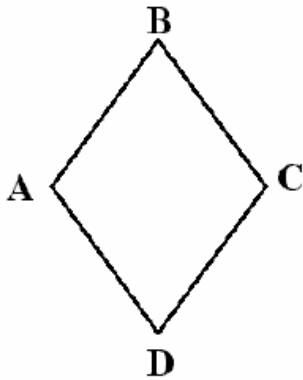
$$PB = \sqrt{(1-4)^2 + (2-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{17} \text{ a equação pedida é: } (x-4)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 17 \quad 1.5 \quad OF = \sqrt{(3-0)^2 + (-3-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{19}$$

A condição que define a esfera pedida é: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 19$. 2.1.1 recta 2.1.2 plano 2.2.1 recta 2.2.2 plano 2.3.1 ponto 2.3.2 recta
3. $B(-a,b,c)$; $C(-a,-b,c)$; $D(a,-b,c)$; $E(a,b,-c)$; $F(-a,c,-c)$; $H(-a,-b,-c)$; $I(a,-b,-c)$ 4.1 $A(0,0,7)$; $B(0,4,7)$; $C(4,4,7)$; $O(0,0,0)$; $E(0,4,0)$; $F(8,4,0)$; $G(12,4,0)$; $H(12,0,0)$; $I(12,0,4)$; $J(12,4,4)$; $L(8,0,4)$ 4.2.1 $z=4$ 4.2.2 $y=4$ 4.2.3 $x=12$ 4.3.1 DA 4.3.2 OE 5. $A(3;5;0)$; $B(3,0,2)$; $C(0,5,2)$; $D(3,5,2)$ 6.1 $x=2 \wedge z=4$ 6.2 $y=2 \wedge z=4 \wedge -2 \leq x \leq 2$ 6.3 $x=2 \wedge -2 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq z \leq 4$ 7.1 $x=-2$ 7.2 $z=-10$ 7.3 $y=-5$ 7.4 $z=4$ 7.5 $x=-4 \wedge y=2$ 7.6 $x=1/3 \wedge z=2$ 8.1 $A(4,-2,0)$; $B(4,2,0)$; $C(0,2,0)$; $D(0,-2,0)$; $E(4,-2,4)$; $F(4,2,4)$; $G(0,2,4)$; $H(0,-2,4)$ 8.2.1 $E'(-4,2,-4)$; $G'(0,2,-4)$ 8.2.2 $E''(4,-2,-4)$; $G''(0,2,-4)$ 8.3 $\sqrt{5}$ cm 8.4 $\approx 16,6 \text{ cm}^2$ 9.1 A distância ao plano xOy é $1/5$ cm, ao plano xOz é $\sqrt{2}$ cm e ao plano yOz é 2cm. 9.2 A distância do ponto ao eixo Ox é 1,43cm, ao eixo Oy é 2cm e ao eixo Oz é 2,45cm (aproximadamente)

○ Vectores



1 - $[ABCD]$ é um losango:



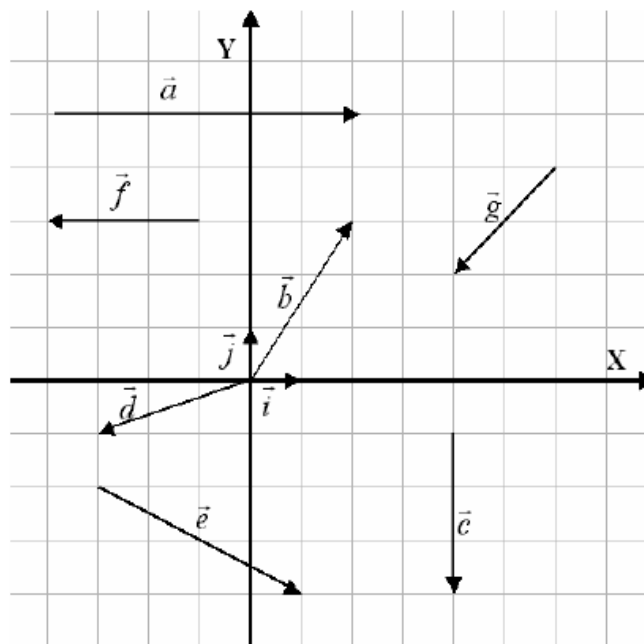
a) Indique quantos segmentos orientados podemos definir:

- com os lados do losango;
- com os vértices do losango.

b) Indique quantos vectores distintos podemos definir:

- com os lados do losango;
- com os vértices.

2 - Indique as componentes e as coordenadas de cada um dos vectores representados na figura.



3 - Considere os pontos : $A(3;2)$; $B(3;3)$; $C(5;3)$; $D(4;4)$; $E(5;5)$; $F(5;6)$; $G(4;7)$; $H(2;6)$; $I(3;5)$ e $J(1;6)$.

a) Justifique que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{FE}$.

b) Escreva as coordenadas de : $\overrightarrow{JH}$; $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{GD}$ e $\overrightarrow{HF}$.

4 - No referencial o . n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ represente o vector:

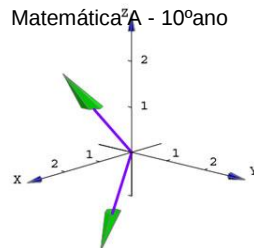
a) $-3\vec{i} + 5\vec{j}$;

b) de coordenadas $(0;-1)$;

c) de coordenadas $(3;-2)$;

d) de coordenadas $(2;0)$.

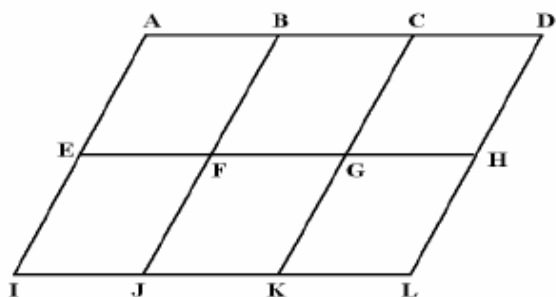
○ Vectores



5 - Sendo $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{v} = (1;3)$ e $D = (-1;0)$, determine as coordenadas de C.

6 - Dados $A = (-1;5)$ e $B = (6;3)$, determine as coordenadas de M, sabendo que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

7 - O paralelogramo [ADLI] está dividido em seis paralelogramos geometricamente iguais.



- a) Com os elementos da figura, indique::
- dois segmentos orientados equipolentes;
 - dois vectores com a mesma direcção, o mesmo sentido e comprimentos diferentes;
 - dois vectores simétricos;
- b) Observe a figura e complete de modo a obter proposições verdadeiras:

b.1) $\vec{F} + \overrightarrow{HD} = \dots$ b.2) $\vec{E} + \dots = \vec{J}$

b.5) $\overrightarrow{BC} + \dots = \overrightarrow{BC}$ b.6) $\overrightarrow{AL} + \dots = \vec{0}$

b.9) $2\overrightarrow{AB} = \dots$ b.10) $\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{CB} = \dots$

b.3) $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KC} = \dots$ b.4) $\dots + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AJ}$

b.7) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \dots$ b.8) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{LI} = \dots$

8 - Considere os pontos $P(2;-1)$, $Q(5;-2)$, $R(3;-1)$ e $S(-3;-1)$.

Determine as coordenadas de:

a) $Q + \overrightarrow{QR}$

b) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS}$

c) $R + 3\overrightarrow{QS}$

d) $\overrightarrow{PP} - \overrightarrow{PS}$

9 - Considere os pontos $A\left(-3;\frac{1}{2}\right)$, $B\left(2;-\frac{1}{3}\right)$, $C\left(-\frac{1}{2};0\right)$ e $D(-2;-3)$. Determine as coordenadas do ponto P sabendo que :

a) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BD}$

10 - Sendo $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ três vectores quaisquer do plano, simplifique:

a) $2\vec{a} - \vec{b} - 3(\vec{a} + \vec{b})$

b) $2(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}(8\vec{c})$

c) $\frac{4}{3}(2\vec{a} - \vec{c}) - \vec{c} + \frac{5}{3}\vec{a}$

11 - Considere os vectores $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = -2\vec{i}$ e $\vec{d} = 5\vec{j}$ num referencial o.n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Determine as coordenadas de cada um dos vectores:

a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

b) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$

c) $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

d) $\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$

e) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

f) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

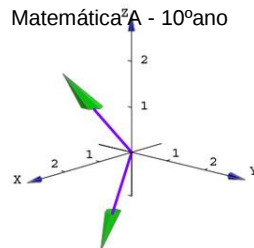
g) $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})$

h) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{d}$

i) $-\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} + \frac{2}{5}\vec{d}$

j) $-\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$

○ Vectores



12 - $[AB]$ é um diâmetro de uma circunferência de centro C .

Sabendo que $A(-1;3)$ e $C(2;0)$, determine as coordenadas de B .

13 - Indique se são verdadeiras ou falsas as proposições:

- a) A soma de dois vectores é um vector;
- b) A soma de um ponto com um vector é um vector;
- c) O produto de um número real, não nulo, por um vector, é um vector com a mesma direcção;
- d) O produto de um número real, não nulo, por um vector, é um vector com o mesmo sentido.

14 - Determine a norma dos vectores:

- a) $\vec{u}(-3;0)$
- b) $\vec{v}(0;5)$
- c) $\vec{w}(-1;2)$
- d) $\vec{a}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$
- e) $\vec{b}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- f) $\overrightarrow{AB}$ em que $A(0;3)$ e $B(3;0)$

15 - Verifique se são colineares os seguintes pares de vectores:

- a) $\vec{u}(4;1)$ e $\vec{v}(-8;-2)$
- b) $\vec{u}\left(\frac{2}{3};-1\right)$ e $\vec{v}(4;1)$
- c) $\vec{u}=2\vec{i}$ e $\vec{v}=-\frac{3}{5}\vec{i}$
- d) $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ e $\vec{v}=-3\vec{i}-3\vec{j}$

16 - Para cada um dos seguintes pares de vectores, determine x de modo que sejam colineares:

- a) $\vec{a}=(2;x)$ e $\vec{b}=(20;30)$
- c) $\vec{a}=(5;x)$ e $\vec{b}=(0;0)$
- b) $\vec{a}=(x;-2)$ e $\vec{b}=(0;16)$
- d) $\vec{a}=(3x+1;1-5x)$ e $\vec{b}=(2;-3)$

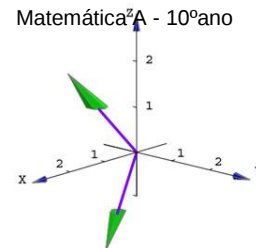
17 - Num referencial o .n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ é dado o vector $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}$. Determine pelas suas coordenadas o vector:

- a) colinear com $\vec{a}$ e com o triplo do seu comprimento;
- b) colinear com $\vec{a}$, com o sentido oposto ao de $\vec{a}$ e o dobro do seu comprimento;
- c) que tem a mesma direcção de $\vec{a}$ e a terça parte do seu comprimento.

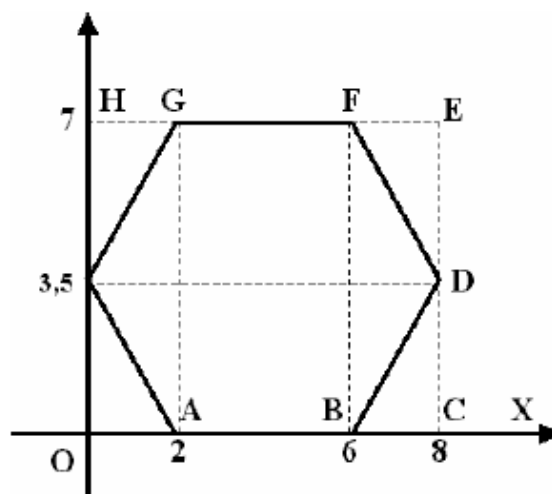
18 - Determine, num referencial o .n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$, as coordenadas dos vectores:

- a) $\vec{u}$ colinear com o vector $\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j}$ e de norma 4;
- b) $\vec{x}$ colinear com o vector $\vec{u}(1,3)$ e de norma 10;
- c) $\vec{v}$ colinear com o vector $\vec{u}(-4,3)$, de norma 12 e com sentido oposto a $\vec{u}$.

○ Vectores



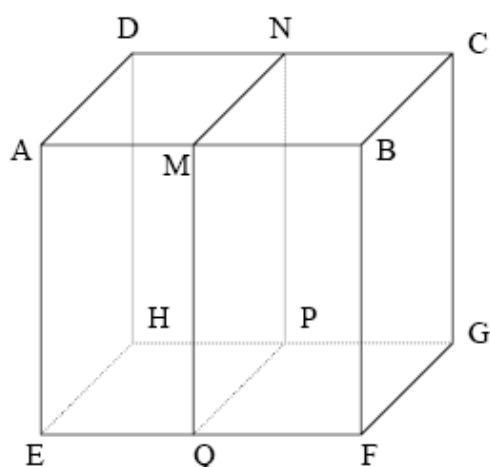
- 19 a) Verifique se o hexágono $[ABDFGI]$ da figura é regular;
- b) Averigüe se os vectores $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{BD}$ têm a mesma direcção;
- c) Determine os números reais k e s de modo que: $\overrightarrow{HE} = k \overrightarrow{GF}$
 $\overrightarrow{FD} = s \overrightarrow{BG}$
- d) Determine a área do hexágono.



- 20 - Considere num referencial o.n. $(O; \vec{e}; \vec{f}; \vec{g})$ os pontos $M(1;2;-5)$, $N(-2;0;3)$ e o vector $\vec{u} = 3\vec{e} + \vec{f} + 4\vec{g}$. Calcule:
- a) As coordenadas do vector $\overrightarrow{MN}$;
- b) As componentes do vector $2\vec{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$;
- c) As coordenadas do ponto A onde está aplicado o representante do vector $\vec{u}$ que termina em M;
- d) As coordenadas do vector $\vec{x}$ colinear com $\vec{u}$ e de norma $\sqrt{52}$;
- e) As coordenadas do ponto médio de $[MN]$.

21 - Averigüe se são colineares os vectores $(0.1; -3; 5)$ e $(0.12; -3.6; 6)$.

22 - Calcule a ordenada de um vector $\vec{a}(-2; y; 6)$ sabendo que a sua norma é 7.



$$\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{PC}, 2\overrightarrow{GC} - 3\overrightarrow{HB}.$$

23 - A figura representa 2 paralelepípedos iguais com a face $[MNPQ]$ comum.

1. Calcule:

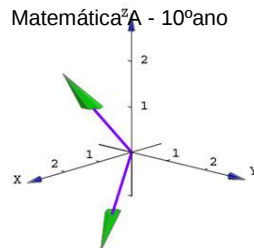
- a) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{PG}$
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$
- c) $\overrightarrow{Q} + \overrightarrow{HP} - 2\overrightarrow{NC}$

2. Sendo H a origem do referencial $\vec{H}E; \vec{H}P; \vec{H}D$ os eixos coordenados,

$$\|\overrightarrow{HE}\| = \|\overrightarrow{HP}\| = 1 \text{ e } \|\overrightarrow{HD}\| = 2 \times \|\overrightarrow{HP}\|.$$

Indique as coordenadas de: M, B, C, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{PC}$

○ Vectores



Soluções:

1. a) • 8 • 12 b) • 4 • 8

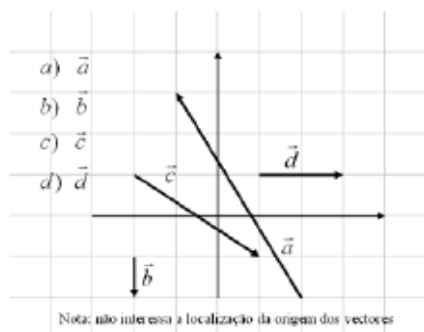
2. $\vec{a} = 6\vec{i}$ $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ $\vec{c} = -3\vec{j}$ $\vec{d} = -3\vec{i} - \vec{j}$ $\vec{e} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$ $\vec{f} = -3\vec{i}$ $\vec{g} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$

$\vec{a}(6,0)$ $\vec{b}(2,3)$ $\vec{c}(0,-3)$ $\vec{d}(-3,-1)$ $\vec{e}(4,-2)$ $\vec{f}(-3,0)$ $\vec{g}(-2,-2)$

3. a) $(0,-1) = (0,-1)$.

b) $\vec{JH} = (1,0)$ $\vec{BD} = (1,1)$ $\vec{AC} = (2,1)$ $\vec{GD} = (0,-3)$ $\vec{HF} = (3,0)$

4.



5. $C = (-2, -3)$

6. $M = (7, -2)$

7. a) • $[I, A]$ e $[J, B]$ p.e.

• $\vec{EF}$ e $\vec{BD}$ p.e.

• $\vec{EG}$ e $\vec{DB}$ p.e.

b) b.1) B

b.2) $\vec{FK}$ p.e.

b.3) $\vec{IB}$ p.e.

b.4) $\vec{AB}$ p.e.

b.5) $\vec{0}$

b.6) $\vec{LA}$

b.7) $\vec{AD}$ p.e.

b.8) $\vec{JI}$ p.e.

b.9) $\vec{AC}$ p.e.

b.10) $\vec{FH}$ p.e.

8. a) $(3, -1)$

b) $(-3, -1)$

c) $(-21, 2)$

d) $(5, 0)$

9. a) $\left(5, -\frac{5}{6}\right)$

b) $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$

c) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

d) $\left(\frac{21}{2}, \frac{29}{6}\right)$

10. a) $-\vec{a} - 4\vec{b}$

b) $2\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$

c) $\frac{13}{3}\vec{a} - \frac{7}{3}\vec{c}$

11. a) $(5, 1)$

b) $(1, -7)$

c) $(14, -7)$

d) $\left(\frac{17}{2}, -\frac{7}{2}\right)$

e) $(5, -4)$

f) $(5, -4)$

g) $(5, -2)$

h) $(3, -7)$

i) $\left(-3, \frac{5}{2}\right)$

j) $(-7, 1)$

12. $B(5, -3)$

13. - a) verdadeira

13 - b) falsa

13 - c) verdadeira

13 - d) falsa

14. a) $\|\vec{u}\| = 3$

b) $\|\vec{v}\| = 5$

c) $\|\vec{w}\| = \sqrt{5}$

d) $\|\vec{a}\| = 1$

e) $\|\vec{b}\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

f) $\|\vec{AB}\| = 3\sqrt{2}$

15. a) são

b) não

c) são

d) são

16. a) $x = 3$

b) $x = 0$

c) x indeterminado

d) $x = 5$

17. a) $(9, 15)$ ou $(-9, -15)$

b) $(-6, -10)$

c) $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ ou $\left(-1, -\frac{5}{3}\right)$

18. a) $\left(\frac{12}{5}, -\frac{16}{5}\right)$ ou $\left(-\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$

b) $(\sqrt{10}, 3\sqrt{10})$ ou $(-\sqrt{10}, -3\sqrt{10})$

c) $\left(\frac{48}{5}, -\frac{36}{5}\right)$

19. a) não

b) são colineares

c) $k = 2$ $k = -\frac{1}{2}$

d) 42

20. a) $(-3, -2, 8)$

b) $\frac{9}{2}\vec{e} + \vec{f} + 8\vec{g}$

c) $(-2, 1, -9)$

d) $\pm(3\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

e) $\left(-\frac{1}{2}, 1, -1\right)$

21. são

22. $y = 3$ ou $y = -3$

23.1.a $\vec{EM}$ p.e.

23.1.b $\vec{AF}$ p.e.

23.1.c E

23.2 $M(1, 1, 2)$

$B(1, 2, 2)$

$C(0, 0, 2)$

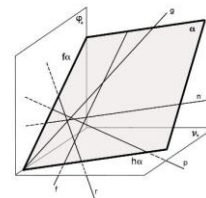
$\vec{HB} = (1, 1, 2)$

$\vec{PC} = (0, 1, 2)$

$\vec{GC} = (0, 0, 2)$

$\vec{HB} + \vec{PC} = (1, 3, 4)$

$2\vec{GC} - 3\vec{HB} = (-3, -6, -2)$



○ Equações da recta

1.

- Escreva uma equação vectorial da recta r que passa por $P(-2;0)$ e tem a direcção do vector $\vec{u} = (-1;3)$.
- Indique dois pontos de r .
- O ponto $(3;2)$ pertence a r ?
- Indique os pontos de intersecção da recta r com os eixos coordenados;
- Determine as coordenadas do ponto da recta r que tem ordenada 3;
- Escreva uma equação duma recta s paralela a r e que contenha o ponto $Q(-3;-3)$.

2. No espaço, escreva a equação vectorial da recta que contém:

- os pontos $A(1;2;3)$ e $B(4;0;2)$;
- o ponto $A(1;2;3)$ e a origem das coordenadas;
- o ponto $P(1;1;1)$ e tem a direcção do vector $\vec{v} = (1;0;0)$;
- o eixo dos xx ;
- o eixo dos yy ;
- o eixo dos zz ;
- o ponto $P(1;2;1)$ e é paralela à recta $(x; y; z) = (-1;0;3) + k(1;2;0), k \in \mathbb{R}$
- o ponto $P(3;2;1)$ e é paralela a xOy ;
- o ponto $P(3;2;1)$ e é paralela ao eixo Oz .

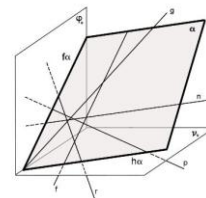
3. Considere as rectas de equação :

$$r: (x;y;z) = (-1;2;3) + k(1;3;4), k \in \mathbb{R} \quad s: (x;y;z) = (0;1;2) + k(2;6;8), k \in \mathbb{R}$$

- Averigúe se r e s são paralelas;
- Indique dois pontos da recta s ;
- Determine o ponto em que r intersecta o plano xOy ;
- Determine o ponto em que r intersecta o plano zOy .

4. Escreva a equação vectorial e a equação reduzida da recta que:

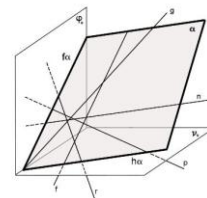
- Passa por $R(-2;0)$ e tem a direcção de $\vec{u} = (-1;3)$;
- Passa por $P(-1;0)$ e $Q(0;2)$;
- Passa por $A(5;1)$ e é paralela a $\overrightarrow{BC}$ sendo $B(-3;2)$ e $C(-4;0)$;
- Tem equação $3x + y - 2 = 0$;
- É horizontal e passa por $(2;-4)$;
- É vertical e passa por $(2;-4)$;
- Passa por $A(\pi;3)$ e $B(\pi;-2)$;
- Intersecta o eixo dos XX no ponto de abscissa 2 e é vertical;



○ Equações da recta

- i. Passa por $C(-4;0)$ e tem ordenada na origem 2;
 - j. Contém o ponto $(-1;3)$ e tem declive 5;
 - k. Tem declive $\frac{1}{3}$ e contém o ponto médio do segmento de recta de extremos $(-1;2)$ e $(3;-1)$;
 - l. Passa pela origem e é paralela à recta $\frac{x}{2} = \frac{y+3}{5}$;
 - m. É paralela a $y = x$ e passa no ponto simétrico de $(-1;2)$ em relação à origem;
 - n. É paralela à bissetriz dos quadrantes pares e tem ordenada na origem 3;
 - o. É paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares e corta o eixo dos yy no ponto de ordenada 2.
5. Considere as rectas de equação: $(x;y) = (6;1) + \lambda(6;k)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x + 3y = 0$. Determine k de modo que as rectas sejam paralelas.
 6. Considere a recta s de equação $3y = 2x - 3$.
 - a. Indique o declive e um vector director de s ;
 - b. Escreva uma equação vectorial de s ;
 - c. Determine a ordenada na origem de s ;
 - d. Determine a abcissa na origem de s ;
 - e. Indique dois pontos da recta s ;
 - f. Determine o ponto de s que tem abcissa 1;
 - g. Calcule m de modo que o ponto $(m; 1-m)$ pertença a s .
 7. Determine as coordenadas do ponto Q de abcissa 4 que pertence a recta de equação:
 - a. $3x - 4y + 2 = 0$;
 - b. $y = 3$ c) $(x; y) = (-1;0) + k(1;3)$, $k \in \mathbb{R}$
 8.
 - a. Verifique se os pontos $A(1;2)$, $B(3;-1)$ e $C(5;3)$ são colineares.
 - b. Determine o parâmetro m de modo que os pontos $A(1;2)$, $B(-2;3)$ e $C(3;m)$ sejam colineares.
 9. Calcule as coordenadas do ponto da recta $y = 1 - 2x$ equidistante de $A(1;0)$ e $B(-2;3)$.
 10. Dois lados consecutivos de um paralelogramo estão contidos nas rectas: $r: y = \frac{2}{3}(x+1)$ e $s: y - 3x + 4 = 0$.
 - a. Determine as coordenadas de um dos vértices do paralelogramo;
 - b. Escreva equações das rectas de suporte dos outros dois lados do paralelogramo sabendo que se intersectam no vértice $(0;-5)$;
 - c. Calcule as coordenadas dos outros dois vértices do paralelogramo.

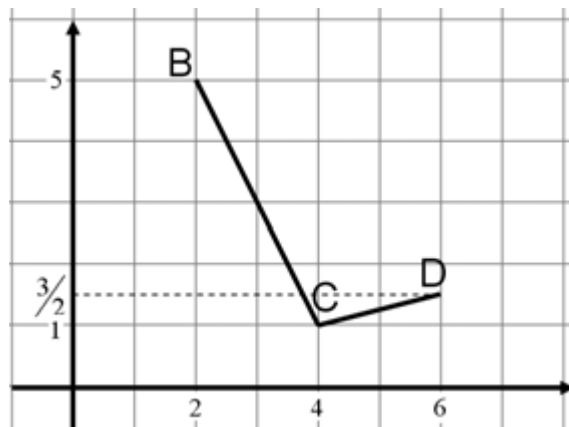
- Equações da recta



11. Represente no plano a condição $(x; y) = (-4; -5) + t(3; 2)$, $0 \leq t \leq 2$

12. Escreva uma condição que represente:

- a semi-recta CD ;
- O segmento de recta $[BC]$



13. Diz-se que a equação $\frac{x-p}{2} = y-1$, $p \in \mathbb{R}$, representa uma família de rectas porque para cada valor real de p a condição dada define uma recta.

- Justifique que todas as rectas da família são paralelas entre si.
- Determine a recta da família que:
 - passa pelo ponto $(-2; 1)$;
 - passa pelo ponto $(5; 1)$

14. Considere a família de rectas $(x; y) = (1; -3) + k(p; 5)$, $k \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Determine a recta da família que passa pelo ponto $(2; 3)$; b) é paralela à recta $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$.

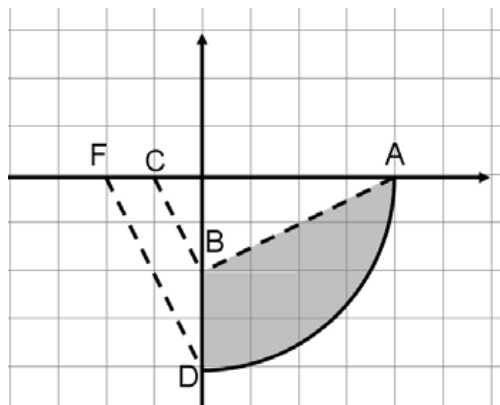
15. É possível prever o crescimento de um feto com mais de 12 semanas de vida através da fórmula: $C = 1,53t - 6,7$, onde C é o comprimento em centímetros e t a idade em semanas.

- Indique um valor aproximado da idade de um feto que tenha 30 cm de comprimento;
- Determine um valor aproximado do comprimento de um feto que tenha 30 semanas.

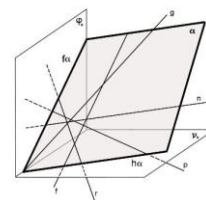
16. Relativamente a um referencial o .n. (figura junta) sabe-se que:

- $A(4; 0)$ e $B(0; -2)$
- $DE \parallel BC$
- AD é um arco de circunferência de centro em O .
- $[CB]$ está contido na recta r de equação $y = -2x - 2$.

- Mostre que a recta AB pode ser definida pela equação $x - 2y - 4 = 0$
- Determine as coordenadas do ponto C .
- Indique um vector director da recta DE ;
- Defina analiticamente a região sombreada.



- Equações da recta

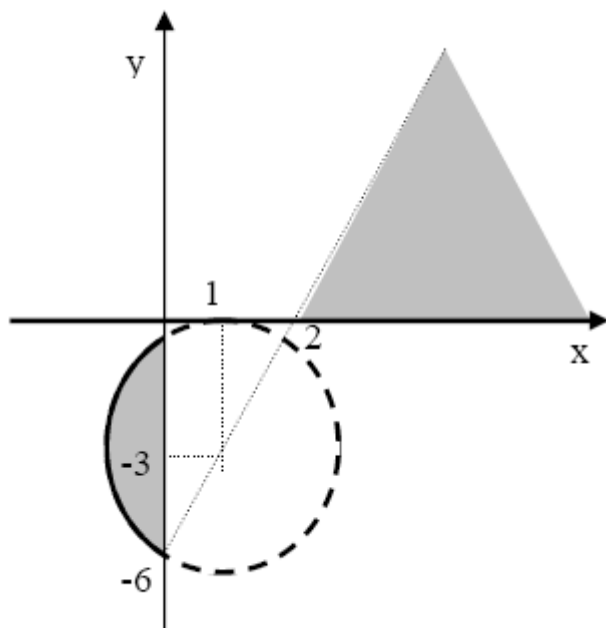


17. Represente graficamente os conjuntos:

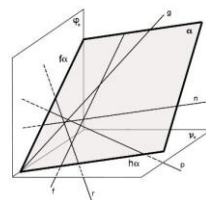
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (3x - y + 1)(4x + 2y - 5) = 0\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (3x - y + 1)^2 + (4x + 2y - 5)^2 = 0\}$$

18. Traduza por uma condição o conjunto de pontos do plano da região sombreada.



○ Equações da recta



Soluções:

1 a) $(x, y) = (-2, 0) + k(-1, 3), k \in \mathbb{R}$ p.e.

1 b) $(-2, 0)$ e $(-3, 3)$ p.e. 1 c) Não

1 d) $(-2, 0)$ e $(0, -6)$ 1 e) $(-3, 3)$

1 f) $(x, y) = (-3, -3) + k(-1, 3), k \in \mathbb{R}$ p.e.

2 a) $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(3, -2, -1), k \in \mathbb{R}$ p.e.

2 b) $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(1, 2, 3), k \in \mathbb{R}$ p.e.

2 c) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$ p.e.

2 d) $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$ p.e.

2 e) $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(0, 1, 0), k \in \mathbb{R}$ p.e.

2 f) $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$ p.e.

2 g) $(x, y, z) = (1, 2, 1) + k(1, 2, 0), k \in \mathbb{R}$ p.e.

2 h) $(x, y, z) = (3, 2, 1) + k(0, 0, 3), k \in \mathbb{R}$ p.e.

2 i) $(x, y, z) = (3, 2, 1) + k(2, 3, 0), k \in \mathbb{R}$ p.e. 3 a) são paralelas 3 b) $(0, 1, 2)$ e $(2, 7, 10)$.

3 c) $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, 0\right)$ 3 d) $(0, 5, 7)$ 4 a) $(x, y) = (-2, 0) + k(-1, 3), k \in \mathbb{R}; y = -3x + 6$

4 b) $(x, y) = (-1, 0) + k(1, 2), k \in \mathbb{R}; y = 2x + 2$ 4 c) $(x, y) = (5, 1) + k(1, 2), k \in \mathbb{R}; y = 2x - 9$

4 d) $(x, y) = (0, 2) + k(-3, 1), k \in \mathbb{R}; y = -3x + 2$ 4 e) $(x, y) = (2, -4) + k(0, 2), k \in \mathbb{R}; y = -4$

4 f) $(x, y) = (2, -4) + k(0, 2), k \in \mathbb{R}; x = 2$ 4 g) $(x, y) = (\pi, 3) + k(0, 5), k \in \mathbb{R}; x = \pi$

4 h) $(x, y) = (2, 0) + k(0, 2), k \in \mathbb{R}; y = 2$ 4 i) $(x, y) = (-4, 0) + k(4, 2), k \in \mathbb{R}; y = \frac{1}{2}x + 2$

4 j) $(x, y) = (-1, 3) + k(1, 5), k \in \mathbb{R}; y = 5x + 8$ 4 k) $(x, y) = \left(1, \frac{1}{2}\right) + k(3, 1), k \in \mathbb{R}; y = \frac{1}{3}x$

4 l) $(x, y) = (0, 0) + k(2, 5), k \in \mathbb{R}; y = \frac{5}{2}x$ 4 m) $(x, y) = (1, -2) + k(1, 1), k \in \mathbb{R}; y = x - 3$

4 n) $(x, y) = (0, 3) + k(1, -1), k \in \mathbb{R}; y = -3x + 3$ 4 o) $(x, y) = (0, 2) + k(1, 1), k \in \mathbb{R}; y = x + 2$

5 -2 6 a) $m = \frac{2}{3}; \vec{v}(3, 2)$ 6 b) $(x, y) = (0, -1) + k(3, 2), k \in \mathbb{R};$ 6 c) $y = -1$

6 d) $y = \frac{3}{2}$ 6 e) $\left(1, -\frac{1}{3}\right); (3, 3)$ 6 f) $\left(1, -\frac{1}{3}\right)$ 6 d) $m = \frac{6}{5}$

7 a) $\mathcal{Q}\left(4, \frac{7}{2}\right)$ 7 b) $\mathcal{Q}(4, 3)$ 7 c) $\mathcal{Q}(4, 15)$ 8 a) não 8 b) $m = \frac{4}{3}$

9 P $\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ 10 a) $(2, 2)$ 10 b) $y = \frac{2}{3}x - 5; y = 3x - 5$ 10 c) $\left(-\frac{3}{7}, -\frac{37}{7}\right); \left(\frac{17}{7}, -\frac{16}{7}\right)$

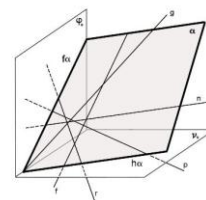
12 a) $(x, y) = (4, 1) + k(4, 1), k > 0$ ou $y = \frac{1}{4}x \wedge x > 4$ 12 b) $y = -2x + 9 \wedge 2 \leq x \leq 4$

13 a) $m = \frac{1}{2}$ em todas 13 b) $\frac{x+2}{2} = y-1; \frac{x-5}{2} = y-1$ 14 a) $(x, y) = (1, -3) + k\left(\frac{5}{6}, 5\right), k \in \mathbb{R};$

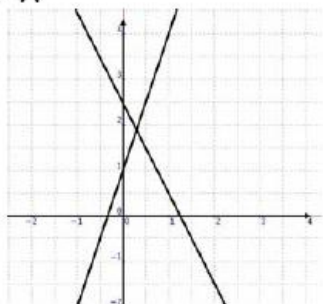
14 b) $(x, y) = (1, -3) + k(2, 5), k \in \mathbb{R};$ 15 a) 24 semanas 15 b) 39,2 cm

16 b) $C(-1, 0)$ 16 c) $\vec{v}(1, -2)$ 16 c) $y < \frac{1}{2}x - 2 \wedge x \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 16$

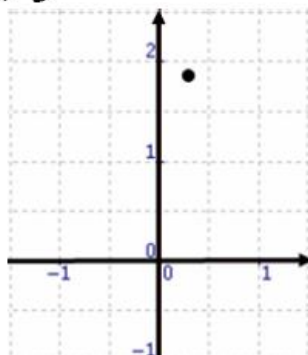
- Equações da recta



17 A

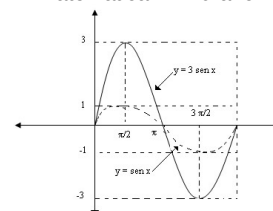


17 B



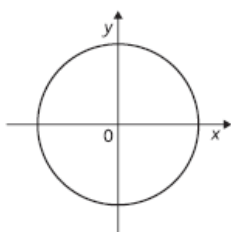
18 $((x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 9 \wedge x \leq 0) \vee (y < 3x - 6 \wedge y \geq 0)$

- Introdução às funções – Representações gráficas

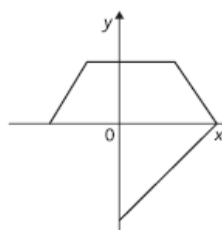


1. Das opções a seguir apresentadas, indique qual pode ser a representação gráfica de uma função, indicando um motivo pelo qual rejeitou cada uma das outras representações.

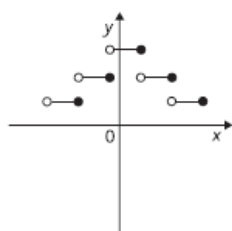
a)



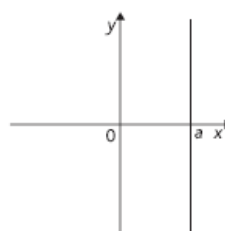
b)



c)



d)



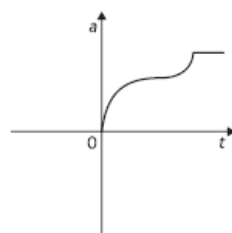
2. Considere o recipiente representado na figura ao lado.

Qual das representações gráficas seguintes pode representar a variação da altura do líquido no recipiente em função do tempo, supondo que estava vazio no instante $t = 0$ e que o enchemos com um caudal constante?

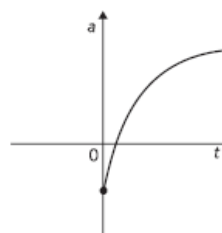
Indique um motivo pelo qual rejeitou cada uma das outras representações.



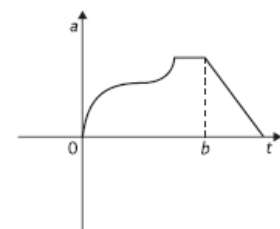
a)



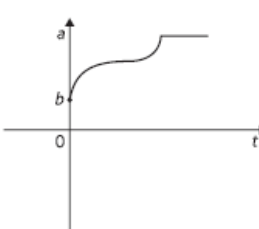
b)



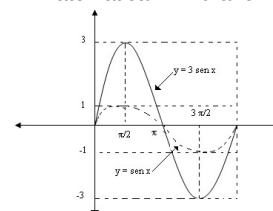
c)



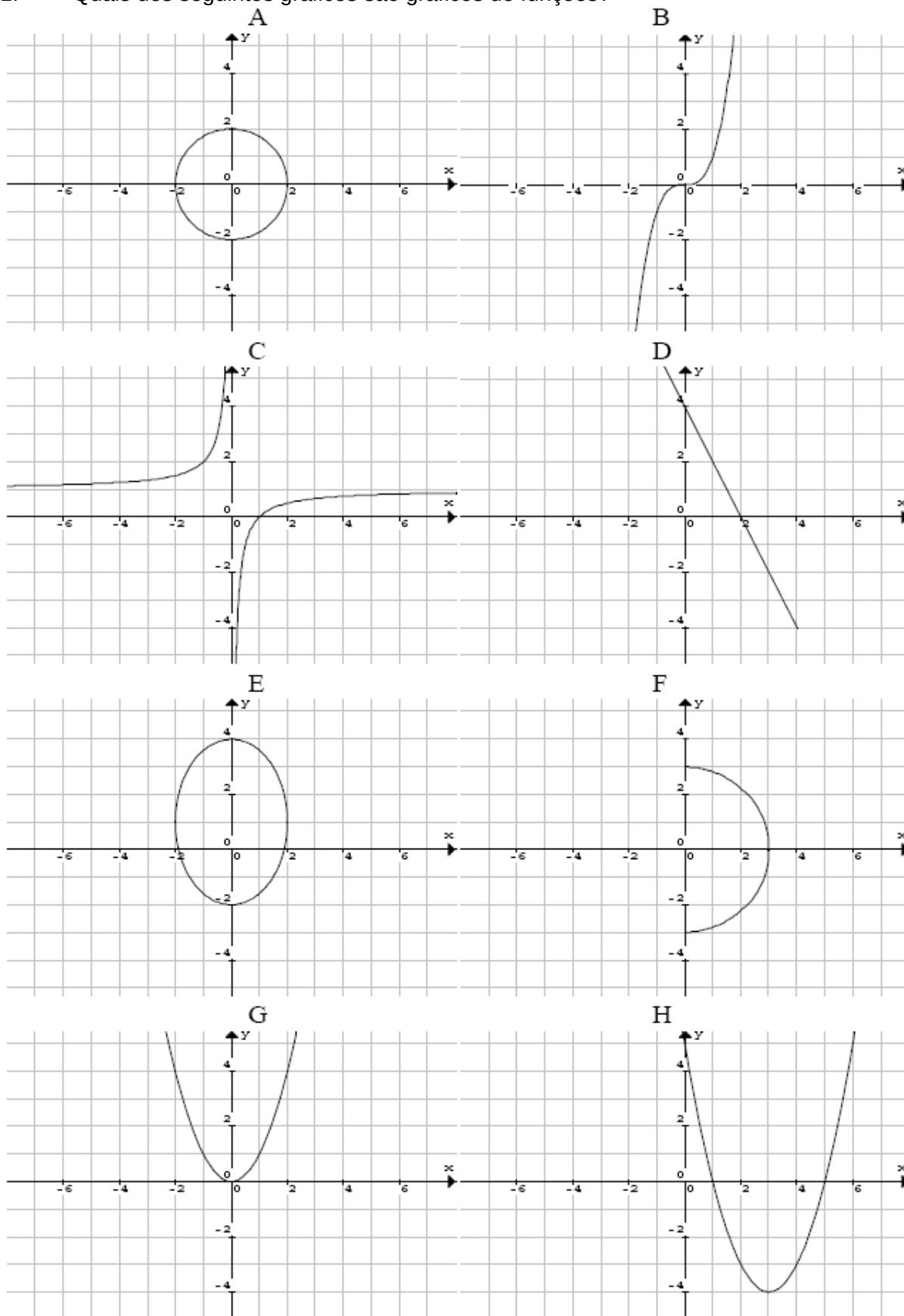
d)



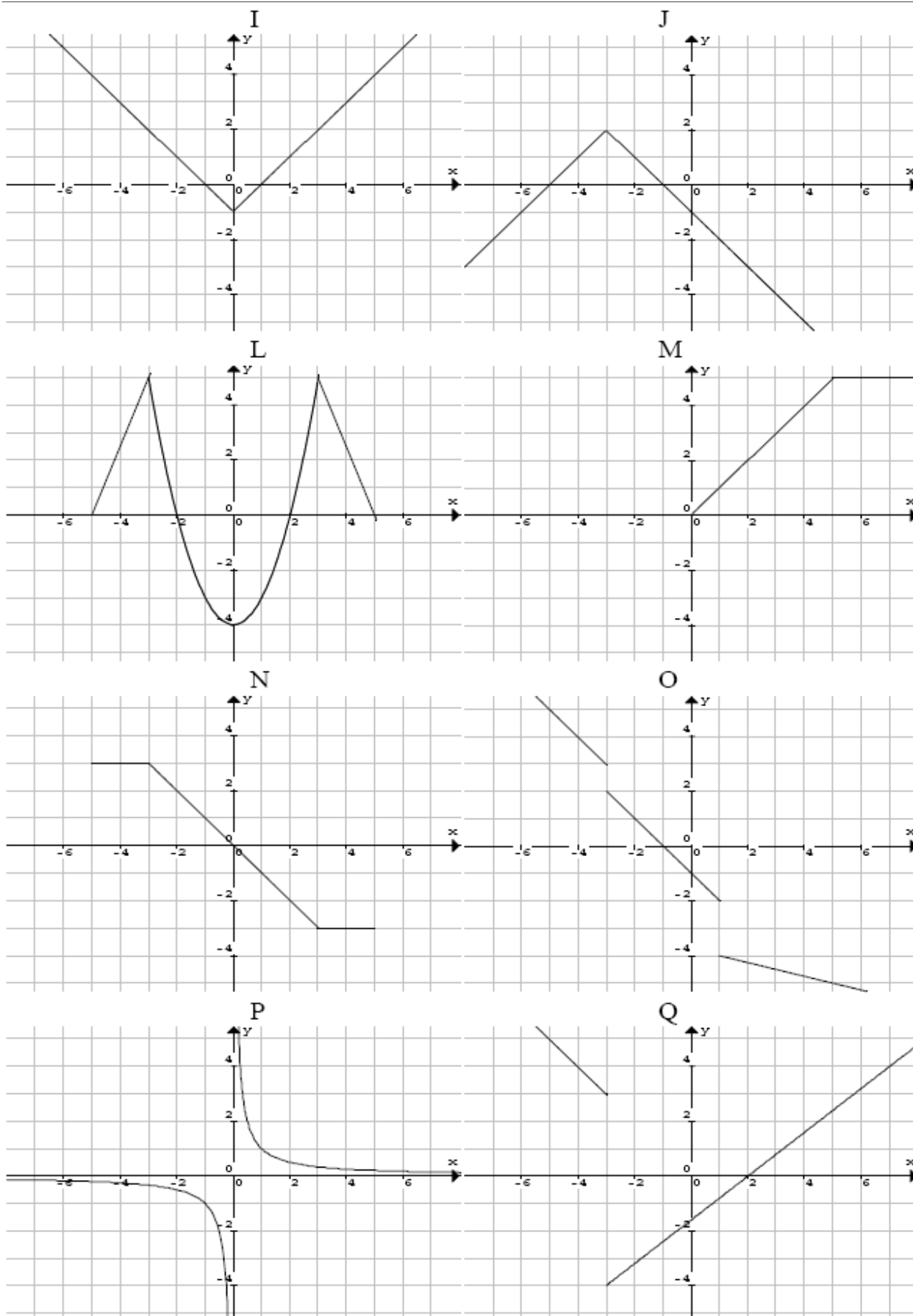
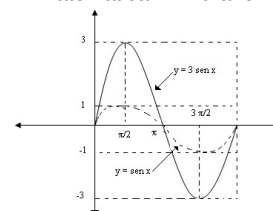
○ Introdução às funções – Generalidades



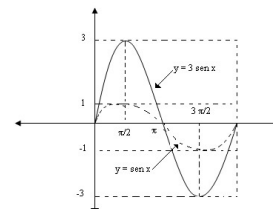
1. Quais dos seguintes gráficos são gráficos de funções?



○ Introdução às funções – Generalidades



- Introdução às funções – Generalidades



2. Observa os gráficos das funções acima e indica para cada uma delas:

- O domínio, o contradomínio e os zeros;
- Os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente;
- Os máximos e os mínimos da função;
- Os intervalos onde a função é positiva e onde é negativa;
- Quais as funções que são injectivas?

Domínio de uma função

Determinar o Domínio de uma Função é indicar para que valores da variável a função tem significado:

Se uma função tem variáveis:

- No denominador, **este terá de ser diferente de zero;**
- No radicando de um radical de índice par, **este terá de ser maior ou igual a zero.**

3. Indique Determina o domínio das seguintes funções:

$$a) f(x) = \frac{3x}{4x+3}$$

$$e) f(x) = \frac{1}{3x-1} + \frac{5x}{\sqrt[3]{1-4x}}$$

$$b) f(x) = \frac{\sqrt{5}}{4x-6}$$

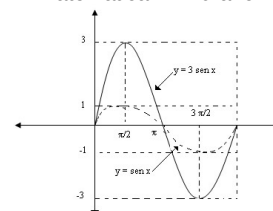
$$f) f(x) = \sqrt{2-7x} - \frac{5}{\sqrt[3]{x+5}}$$

$$c) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+5}}$$

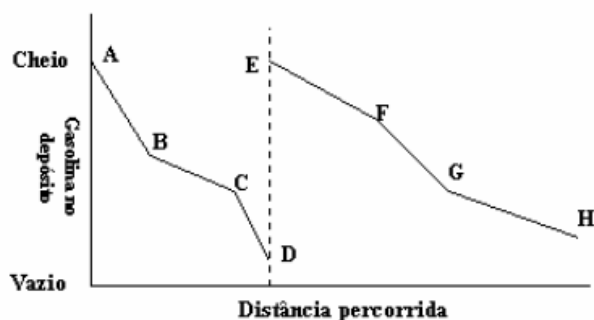
$$g) f(x) = \frac{\sqrt[3]{2x+1}}{x-4} + \frac{\sqrt[4]{2x-2}}{x^2-1}$$

$$d) f(x) = \frac{\sqrt{2-3x}}{\sqrt[4]{2x}}$$

- Generalidade sobre funções



1 - O gráfico mostra a quantidade de gasolina no depósito de um carro durante um viagem.



- Sabendo que a viagem envolveu dois tipos de percurso: um em cidade e outro e estrada, diga, justificando, qual poderá ser parte do gráfico correspondente ao percurso na cidade;
- Explique o que terá acontecido na viagem no momento correspondente no gráfico linha a tracejado DE.

2 - Considere a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = -2x + 1$$

- Que nome dá a esta função?
- Qual é a imagem geométrica do gráfico da função?
- Determine as coordenadas dos pontos de abscissa 0 e 1 do gráfico de g .
Utilize estes pontos para desenhar o gráfico de g .

3 - Do cimo da Torre dos Clérigos do Porto, uma criança deixou cair uma bola. Da Física sabe-se que o espaço percorrido pela bola entre o largar da bola e o instante t é dado pela fórmula: $e = \frac{1}{2}gt^2$ (e em metros, t em segundos), sendo g a constante da gravidade que se considera igual a $9,8 \text{ m/s}^2$.

Considerando $e = f(t)$, vem $f(t) = \frac{1}{2}gt^2$

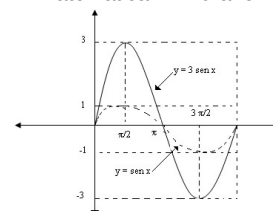
- Calcule a distância percorrida pela bola ao fim de 1s e 3s.
- Determine, aproximadamente, ao fim de quantos segundos a bola atingiu o solo.
- Atribua valores a t de modo a poder esboçar o gráfico de f .

4 - Calcule com duas casas decimais, $f(-1)$ e $f(\sqrt{2})$ sendo f a função definida por:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{2 - x}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{(x - 1)(x + 2)}$$

- Generalidade sobre funções



5 - Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = 3x - 1$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x}$

d) $f(x) = \frac{1}{x} - 2$

e) $f(x) = \sqrt{x-3} - 2$

f) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-2}$

g) $f(x) = 2 + \frac{x}{x^2+1}$

h) $f(x) = \frac{2-\sqrt[4]{x}}{1-x^2}$

i) $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-3x+7}$

j) $f(x) = \sqrt{1-x} \times \sqrt{3+x}$

l) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

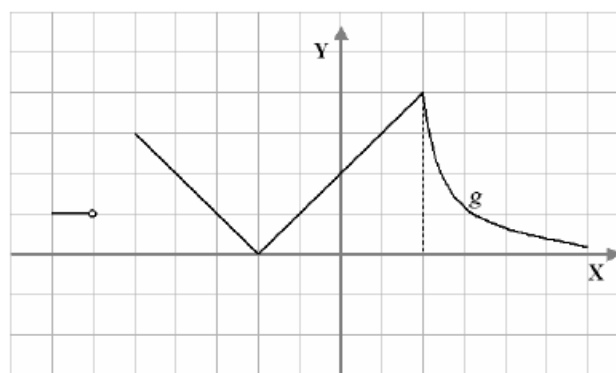
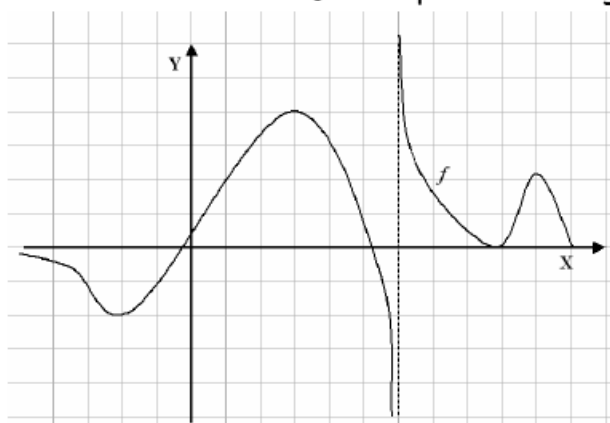
m) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2x+5}$

n) $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2-4}$

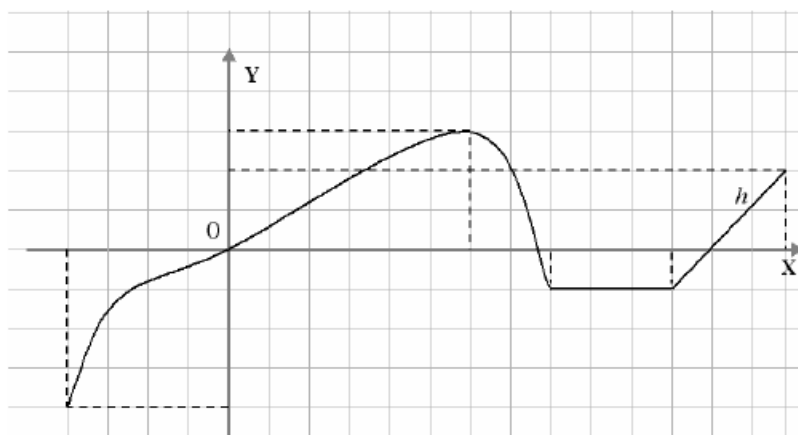
o) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{9+4x}}$

p) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+2}}{2x^2-3x+1}$

6 - Considere as funções representadas graficamente:

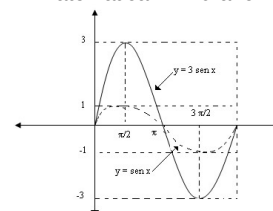


- a) Para cada uma das funções indique o domínio, contradomínio, zeros, intervalos em que é positiva e negativa e construa a tabela de variação indicando os máximos, mínimos, maximizantes e minimizantes.



- b) Para cada uma das funções indique os intervalos em que é negativa e crescente.
 c) Indique o máximo absoluto da função g.
 d) Encontre os valores de x para os quais
- $f(x)=0$
 - $f(x) \geq 0$
 - $h(x)=-1$
 - $g(x)=2$
 - $g(x)<2$
 - $g(x)=1$
 - $-2 < f(x) \leq 0$
- e) Para cada uma das funções indique um intervalo em que seja injectiva e outro em que seja não injectiva.

- Generalidade sobre funções



7 - A tabela seguinte é a tabela de variação da função f .

x	-4		0		2		4		6	$+\infty$
$f(x)$	-1	$\longrightarrow$	-1	$\nearrow$	0		1	$\searrow$	0	$\nearrow$

- Indique os intervalos em que a função f é crescente e os intervalos em que é decrescente.
- Indique os zeros de f e os intervalos em que a função é negativa e positiva.
- Esboce um gráfico para a função f .
- Indique o domínio das funções definidas por cada uma das expressões seguintes:

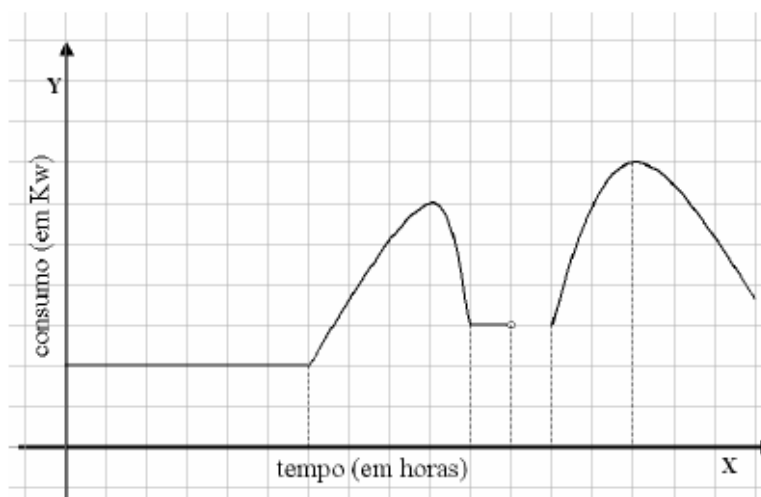
$$\frac{2}{f(x)}$$

$$\sqrt{f(x)}$$

$$\frac{3}{\sqrt{-f(x)}}$$

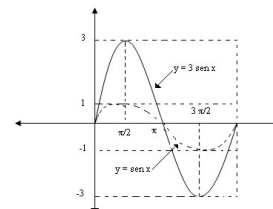
8 - O gráfico mostra o consumo da electricidade de uma casa durante um dia:

- Em que intervalos de tempo o consumo foi constante?
- Durante um dia houve um corte de energia. Pelo gráfico podemos concluir a que horas foi?

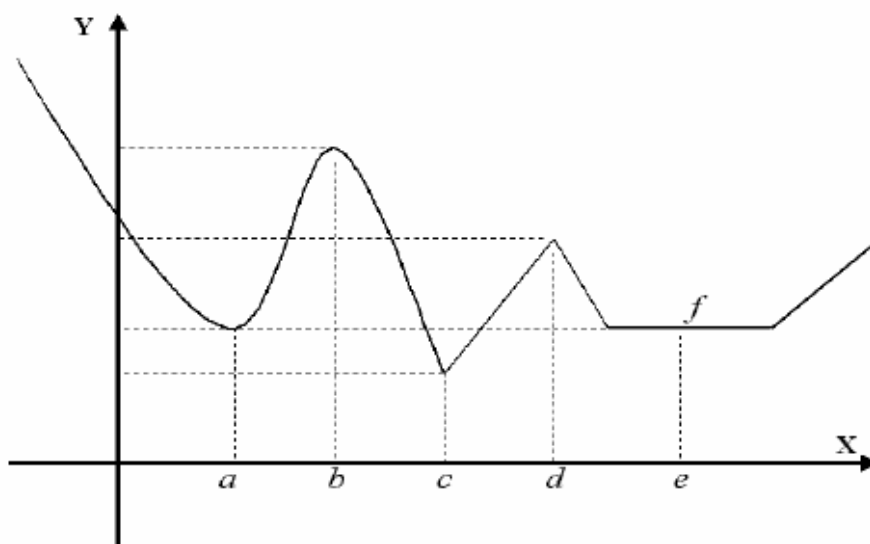


- Em que período do dia foi crescente o consumo de electricidade? E decrescente?
- A que horas do dia o consumo atingiu o valor máximo? E o valor mínimo (não tendo em conta o corte de energia)?

- Generalidade sobre funções



9. Observe a seguinte representação gráfica da função f real de variável real



Quais das seguintes afirmações são verdadeiras relativamente a f :

- (A) $f(a)$ é um mínimo relativo;
- (B) $f(b)$ é o máximo absoluto;
- (C) $f(d)$ é máximo relativo;
- (D) $f(e)$ é máximo relativo e mínimo relativo.

10 - Considere a função f cujo gráfico está abaixo.

10.1 - Indique o domínio e o contradomínio de f .

10.2 - Quais os valores de x para os quais $f(x)=0$?

10.3 - Indique os intervalos em que a função é negativa.

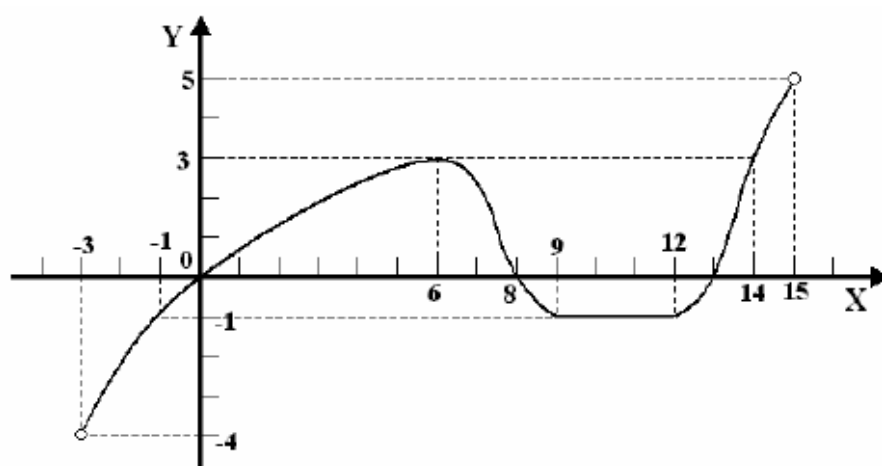
10.4 - Identifique as soluções da equação em $x: f(x) = -2$

10.5 - Indique os maximizantes e os minimizantes de f .

Construa a tabela de variação da função.

10.6 - Indique os valores de x de modo que:

- $f(x) > 0$
- $f(x) > 3$
- $-2 < f(x) \leq 0$



○ Composições

1. Um laboratório farmacêutico lançou no mercado um novo analgésico: o AIQUEJAPASSOU. A concentração deste medicamento, em decigramas por litro de sangue, t horas após ter sido administrado a uma pessoa, é dada por: $c(t) = -0,25t^2 + 2,25t$, $0 \leq t \leq 9$.

O laboratório realizou uma campanha de promoção deste medicamento baseado no slogan:

« AIQUEJAPASSOU – Acção rápida e prolongada! »

Numa breve composição, comente o slogan, tendo em conta que:

- Para a maioria das dores, o AIQUEJAPASSOU só produz efeito se a sua concentração for superior a 1dg/l de sangue;
- De acordo com a associação da defesa do consumidor, um bom analgésico deve começar a produzir efeito, no máximo, meia hora após ter sido tomado, e a sua acção deve permanecer durante, pelo menos sete horas (após ter começado a produzir efeito).

Nota: na resolução desta questão, deve utilizar as capacidades gráficas da sua calculadora e enriquecer a sua composição com traçado de um ou mais gráficos e com as coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às centésimas).

2. Num concurso de aeromodelismo participaram vários aviões, sendo um deles observado desde o instante em que levantou até ao momento da aterragem.

A altura H ao solo desse avião, t minutos após a descolagem, é dada em função do tempo t pela expressão: $H(t) = -0,01t^3 + 0,06t^2 + 0,16t$. $H(t)$ em hectómetros e t em minutos (1 hm corresponde a 100m).

2.1. Após 2 minutos da descolagem, a que altura se encontrava o avião?

Apresenta a resposta em metros.

2.2. Sem recorrer à calculadora, determina o tempo de voo deste avião.

2.3. Segundo os critérios estabelecidos pelo júri do concurso, são observados os seguintes objectivos:

- Estar no ar menos de 8 minutos e 30 segundos.
- Atingir a altitude de pelo menos 105 metros.
- Estar pelo menos durante um minuto consecutivo a pelo menos 100 metros de altitude.
- Meio minuto antes de aterrar, estar a uma altitude superior a metade da altitude máxima atingida.

Classificação:

Muito Bom – cumprimento de todos os objectivos;

Bom – falha apenas um dos objectivos;

Suficiente – falham dois objectivos;

Não classificado – falham mais de dois objectivos.

Numa **composição** matemática, indica a classificação atribuída ao avião referido no enunciado.

○ Composições

Utiliza a calculadora para investigar esta questão, explicitando as conclusões a que chegaste para cada um dos objectivos a cumprir pelo avião. Inclui, na composição, gráfico ou gráficos, assim como coordenadas de pontos (arredondadas às décimas) de interesse para as conclusões.

3. Um jovem estudante em férias chega à gare do caminho de ferro de uma vila portuguesa e precisa de utilizar um carro de aluguer para se deslocar a uma aldeia situada no cimo da serra, a 30 km da estação.

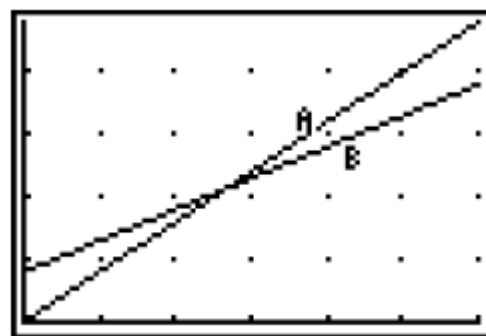
Foi de imediato abordado por um rapazinho que, muito solícito, lhe perguntou qual dos dois carros de aluguer ali estacionados queria ele utilizar. Perante a surpresa do estudante, explicou:

“ – Cá, só há estes dois carros, mas levam preços diferentes. O Sr. Mota leva 4€ pelo transporte da bagagem e 0,50€ por quilómetro; o Sr. Passos cobra 0,80€, por quilómetro, mas não leva nada pelo transporte da bagagem.

Sabe? As pessoas da aldeia “Ver-o-Rio”, que fica a 8 km daqui, só querem ir no carro do Sr. Passos e os de “Beira-Serra”, que fica a pouco mais de 13 km da estação, dizem que tanto lhes dá...”

Depois de pensar um pouco, o nosso jovem turista decidiu ir no carro do Sr. Mota, pois precisava de poupar dinheiro. Os gráficos ao lado descrevem a situação descrita:

[Aqui, admitimos que o preço varia continuamente com a distância percorrida, ao contrário do que se passa numa viagem de táxi, em que o preço é fornecido pelo taxímetro em função do número (inteiro) de impulsos.]



3.1 Qual dos gráficos descreve o tarifário de cada um dos motoristas?

3.2 Designe por x a extensão do percurso (em km) e encontre expressões para $f(x)$ e $g(x)$ que representam o custo das viagens com o Sr. Mota e com o Sr. Passos, respectivamente.

3.3 Que valores foram dados a x ? Quais as escalas utilizadas?

3.4 Faça uma pequena composição onde analise a decisão do estudante.

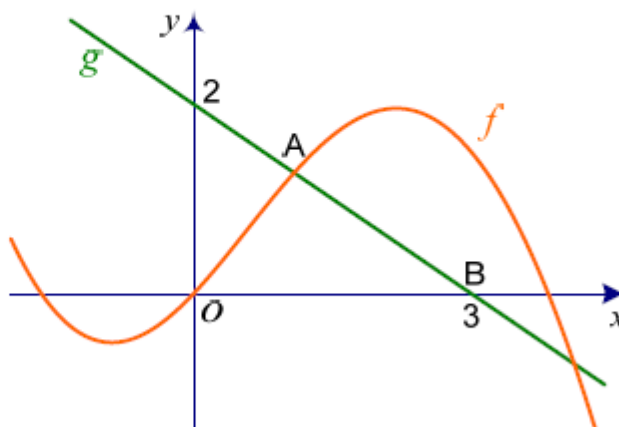
(Não se esqueça de referir:

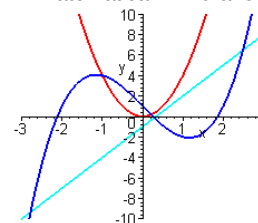
- as razões que levam os outros utilizadores a fazerem as escolhas apresentadas,
- a sua concordância ou não com a decisão do estudante,
- os valores que ele pagaria com cada um dos motoristas,
- e apresentar os gráficos que considerar necessários.)

○ Composições

4. Recorrendo à calculadora obtém um valor aproximado com três casas decimais para a área do triângulo $[OAB]$, sabendo que a curva que passa na origem é parte do gráfico de

$$f(x) = -\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{4} + x.$$





- Aplicações das funções quadráticas

1. Determine as raízes reais de cada uma das equações utilizando a função quadrática adequada na calculadora gráfica. Se necessário, utilize a fórmula resolvente para encontrar o valor exacto das soluções.

- a) $5x^2 = 12x + 9$;
- b) $2x^2 - 6x = 1$;
- c) $(x + 3)^2 = 9$;
- d) $2x(x - 3) = 0$.

2. Resolva cada uma das seguintes inequações utilizando a representação gráfica de uma função quadrática adequada.

- a) $2(x - 3)^2 \geq 5$;
- b) $-x^2 > 5 - 3x$;
- c) $x^2 - 6x \leq -9$.

3. Um míssil é lançado verticalmente para o ar. A altura $h(t)$, em metros, do míssil acima do solo, t segundos após o lançamento é dada por:

$$h(t) = -4,9t^2 + 200t + 50$$

- a) Qual é a altura da plataforma onde estava instalado o míssil antes de ser lançado?
- b) Calcula, com aproximação às décimas de segundo, o tempo que o míssil esteve no ar.

4. A trajectória descrita por uma bola de golfe tem a forma de uma parábola. Num terreno plano a distância percorrida pela bola foi de 30 metros e a altura máxima atingida foi de 9 metros. Escreve uma equação para a trajectória da bola.

5. Um projectil é lançado na vertical, para o ar, de uma altura de 3 metros e com a velocidade inicial de 40 metros/segundo. A altura $h(t)$, em metros, t segundos após o lançamento, é dada por:

$$h(t) = -4,9t^2 + 40t + 3$$

- a) Com a ajuda da calculadora gráfica, determine uma “janela” adequada de modo a poder observar as características da função h .

- b) Use a calculadora gráfica para indicar, com aproximação às décimas de segundo, o tempo t em que o projectil alcança a altura de 50 metros.
- c) Determine, com aproximação às décimas de segundo, quando é que o projectil está a uma altura superior a 50 metros.
- d) Qual é a altura máxima que foi atingida pelo projectil? Apresente o resultado com aproximação às décimas.
- e) Quanto tempo esteve o projectil no ar?
- f) Se a velocidade $v(t)$, em metros por segundo, t segundos após o lançamento, é dada por:

$$v(t) = -9,8t + 40,$$

indique a velocidade do projectil quando este atingir o solo.

6. Do solo é lançado um foguete com a velocidade inicial de 50m/s. A altura $s(t)$, em metros, acima do solo, t segundos após o lançamento, é dada por:

$$s(t) = -4,9t^2 + 50t$$

e a velocidade v em m/s em cada instante t é dada por

$$v(t) = -9,8t + 50$$

- a) No mesmo referencial, represente graficamente as duas funções.
- b) Indique o domínio de cada uma das funções.
- c) Qual é a altura máxima que o foguete atinge?
- d) Qual é a velocidade do foguete no instante em que este atinge a altura máxima?
- e) Quanto tempo o foguete se mantém no ar?
- f) Qual é a velocidade do foguete quando este atinge o solo?

7. Considere a função quadrática definida por:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

- a) Calcule os zeros da função e as coordenadas do vértice da parábola que a representa.
- b) Represente graficamente a função f .
- c) Indique o contradomínio de f .
- d) Indique as soluções das inequações: $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$.

8. De um helicóptero, a 150 metros acima do solo, lança-se um saco com alimentos. A distância $d(t)$ do saco em queda, ao solo, é dada, em metros, por $d(t) = -5t^2 + 150$, t segundos após o lançamento.

- a) Faça um esboço do gráfico da função d .
- b) Quantos segundos levou o saco a cair no solo?
- c) A que altura do solo esteve o saco dois segundos após o lançamento?

d) O outro helicóptero estava a 12 metros do solo. Quantos segundos tinham decorrido, após o lançamento, quando o saco “passou” pelo segundo helicóptero?

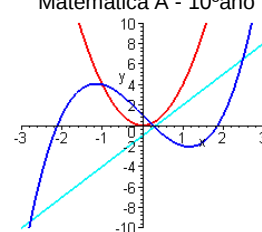
9. Num laboratório foi estudada uma colónia de bactérias. Às oito horas, foi feita a primeira contagem e as seguintes de hora a hora. Verificou-se que N , o número de bactérias em milhares, decorridas h horas, é dado por:

$$N(h) = -h^2 + 4h + 9$$

- a) Quantas bactérias havia às oito horas?
- b) Qual foi o resultado da segunda contagem?
- c) Calcula $N(2) - N(1)$ e interpreta o resultado no contexto do problema.
- d) Em que período do dia o número de bactérias foi superior a 9000?
- e) Descreve a evolução da colónia desde as 8 até às 13 horas.

Ficha elaborada por Rui Tapadinhas

- Aplicações das funções quadráticas



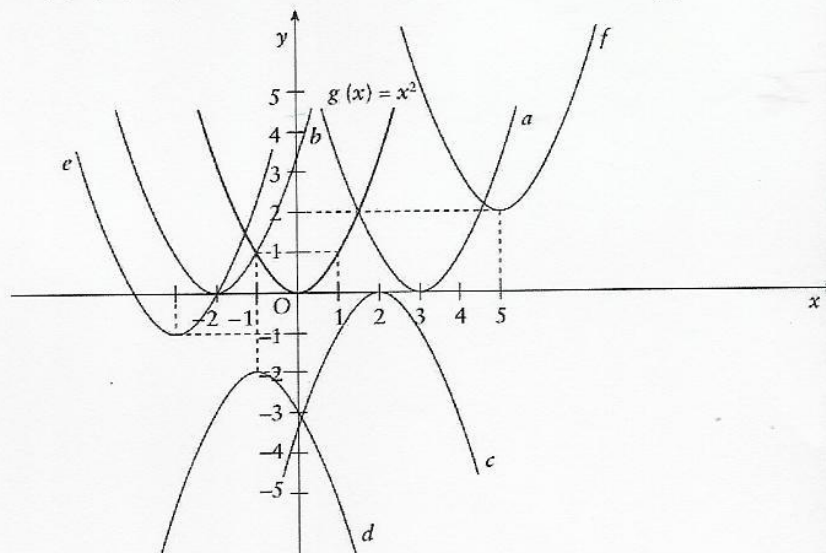
- 1) Uma bola é lançada na vertical de baixo para cima. A altura h , em metros, a que se encontra do solo t segundos após o lançamento é dada por

$$h(t) = -5t^2 + 30t + 1$$



- 1.1) Determine a altura a que a bola se encontrava no instante inicial.
- 1.2) Calcule $h(2)$ e interprete o resultado no contexto do problema.
- 1.3) Determine a altura máxima atingida pela bola e o instante em que ocorreu.
- 1.4) Em que instante a bola atingiu o solo?
- 1.5) Qual o intervalo de tempo em que a bola se encontrava a mais de 26 metros de altura?

- 2) Os gráficos a, b, c, d, e e f foram obtidos do gráfico da função $g(x) = x^2$.



Escreva uma expressão analítica para cada uma das funções a, b, c, d, e e f .

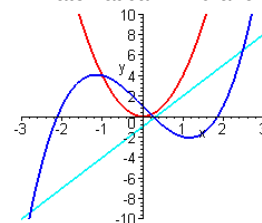
- 3) Defina, algebricamente, uma função quadrática cujo gráfico tem a mesma forma do gráfico da função $f(x) = 2x^2$ e o vértice é o ponto de coordenadas:

3.1) $(3; 0)$

3.2) $(0; -2)$

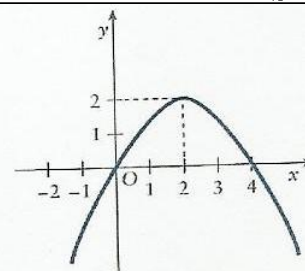
3.3) $(3; -5)$

- Aplicações das funções quadráticas



4) Observe o gráfico da função quadrática f .

- 4.1) Indique os zeros da função e as coordenadas do vértice da parábola que a representa graficamente.
 4.2) Escreva a equação do eixo de simetria da parábola.
 4.3) Determine dois objectos, distintos dos zeros, que tenham a mesma imagem por f .



5) Para cada uma das seguintes funções seguintes, escreva a expressão algébrica na forma $a(x-h)^2 + k$ e indique as coordenadas do vértice da parábola e do eixo de simetria:

$$f_1(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$f_2(x) = x^2 + 6x + 2$$

$$f_3(x) = -x^2 + x + \frac{7}{4}$$

$$f_4(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

6) Considere a parábola definida pela expressão $g(x) = x^2 + 6x + 5$; $x \in \mathbb{R}$

- 6.1) Indique as coordenadas do vértice e o eixo de simetria da parábola.
 6.2) Verifique se -3 pertence ao contradomínio de g .

7) Considere a função $f(x) = x^2 - 2x$

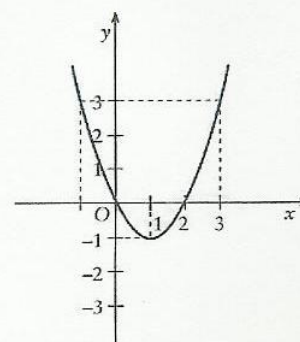
Por observação do gráfico ao lado, indique a solução para cada uma das seguintes inequações:

7.1) $x^2 - 2x > 0$

7.2) $x^2 - 2x \leq 0$

7.3) $x^2 - 2x < -2$

7.4) $x^2 - 2x \geq -1$



8) Resolva as seguintes inequações:

8.1) $x^2 - 9 > 0$

8.2) $-2x^2 + x - 1 \leq 0$

8.3) $x^2 - 2x < -1$

8.4) $-x(x-3) \geq 0$

9) Determine o parâmetro real k , de modo que a função:

$$g(x) = x^2 - 4x + k$$

Tenha:

9.1) Dois zeros

9.2) Um zero

9.3) Nenhum zero

10) Para os doze meses de 2005, uma empresa apresentou as contas, expressas em milhares de euros, através da fórmula:

$$f(t) = t^2 - 8t + 15$$

Em que a unidade de tempo é o mês e $t = 0$ corresponde a 1 de Janeiro de 2005.

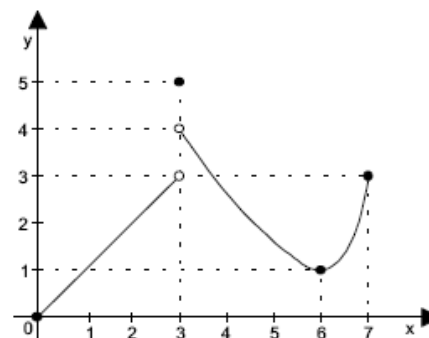
10.1) Em que meses foi positivo o saldo da empresa?

10.2) Indique o mês em que a empresa teve prejuízos e qual o seu montante.

○ Módulos

1. Considera a função g definida pelo gráfico.

- Indica o domínio e o contradomínio.
- Indica os intervalos de crescimento de g .
- Qual o máximo no intervalo $[1, 3]$?
- Indica os mínimos relativos e absolutos de g .
- Será a função contínua no ponto 3 do domínio? E no ponto 5? Justifica.



2. O Miguel foi alugar um barco e encontrou o preçário em baixo.

Número de horas	Até 2	Mais de 2 e até 6	Mais de 6
Preço de cada hora em escudos	2000	1500	1200
Nota: Paga sempre número inteiro de horas arredondado por excesso. (2h e 20 m paga 3 h)			

- Quanto pagará o Miguel se quiser andar cinco horas?
 - Quanto tempo poderá andar o Miguel se dispõe de 5000\$00?
 - Nalgum caso será mais económico andar mais tempo?
 - Será função definida na tabela contínua? Justifica.
 - Define a função definida na tabela graficamente.
 - Define a função definida na tabela por troços.
 - Define graficamente a função **total a pagar** em função do número de horas.
 - Esta última função é injectiva? Justifica.
3. Escreve a expressão analítica e representa graficamente a função afim cujo gráfico é uma recta que:
- tem declive -2 e ordenada na origem 5 ;
 - tem declive $-\frac{1}{2}$ e contém o ponto de coordenadas $(0, 2)$.
4. Relativamente às funções da questão anterior, resolve as questões seguintes e depois confirma os resultados graficamente.
- Resolve analiticamente a equação $y_1(x) = y_2(x)$.
 - Resolve analiticamente a inequação $y_1(x) < y_2(x)$.

○ Módulos

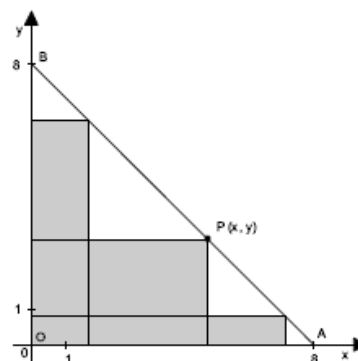
5. A média de dois números x e y é 6.

- Escreve uma equação que traduza a condição e resolve-a em ordem a y .
- Indica três pares de números nas condições referidas.
- Se um dos números é dobro do outro, quais são os números?
Resolve o problema algébrica e geometricamente.

6. No referencial seguinte está representado um triângulo rectângulo isósceles [OAB].

O ponto P pertence ao segmento [AB] e é um dos vértices de um rectângulo cujos lados são paralelos aos eixos coordenados.

- Escreve uma equação vectorial da recta que contém [AB].
- Escreve a equação reduzida da recta que contém [AB].
- Mostra que qualquer triângulo rectângulo definido por P e pelos semieixos positivos, como mostra a figura, tem perímetro 16.

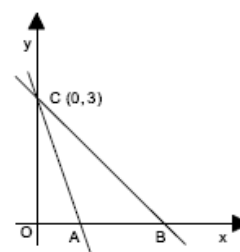


7. Para cada $a \in \mathbb{R}$, a expressão $f(x) = \frac{ax-3}{2}$ define uma função afim.

- Se $a = 4$, determina analiticamente as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico da função com os eixos coordenados.
- Determina a de modo que o gráfico da função contenha o ponto de coordenadas (1, 3).
- Indica o valor de a de modo que f não tenha zeros.
- Determina a de modo que a função seja decrescente.

8. Observa a figura seguinte e, de acordo com os dados, determina a expressão analítica da função afim cujo gráfico é a recta.

- AC, sabendo que a área do triângulo [OAC] é $\frac{3}{2}$.
- BC, sabendo que o triângulo [OBC] é isósceles.



9. Um rato está a ser perseguido por um gato.

Às 20 h 52 min 3 s o rato leva 5 metros de avanço sobre o gato.

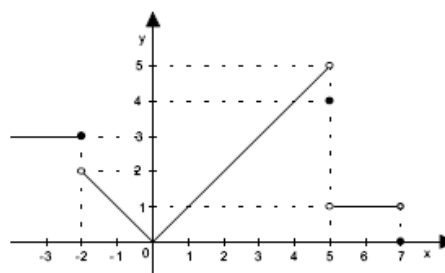
As velocidades de corrida do gato e do rato são consideradas constantes e são, respectivamente, 8 m/s e 6 m/s.

- O que representam as expressões $f_1(t) = 5 + 6t$ e $f_2(t) = 8t$?
- Determina a hora em que o gato alcançou o rato.
Resolve o problema analítica e graficamente.

10. Na figura ao lado está representada graficamente a função h .
Define-a algebricamente.

11. Representa graficamente a função $x \rightarrow |f(x)|$ a partir do gráfico de f :

- $f(x) = x - 2$
- $f(x) = x + 2$
- $f(x) = -2x + 1$
- $f(x) = -\frac{1}{3}x - 2$



o Módulos

12. Escreve sem usar o símbolo módulo (define por troços) e representa graficamente cada uma das funções:

a) $f(x) = |x| - 2$

b) $g(x) = \frac{|x|}{|x|}$

c) $h(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$

d) $i(x) = \frac{x-|x|}{2}$

e) $j(x) = \frac{x+|x|}{2}$

13. Considera a função real de variável real definida por: $f: x \rightarrow y = |x-2| - 3$.

- Determina algebricamente os zeros de f .
- Descreve como podes obter o gráfico de f a partir do gráfico da função $y = |x|$.
- Define graficamente a função f .
- Indica o máximo, o maximizante e os intervalos de monotonia da função $g(x) = -|f(x)|$.

14. Considera a função real de variável real definida por $f: [-3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow y = 3 - |x|$.

- Qual é o contradomínio da função?
- Qual é o menor valor da função?
- Representa graficamente a função g , sendo $g(x) = -2f(x)$.

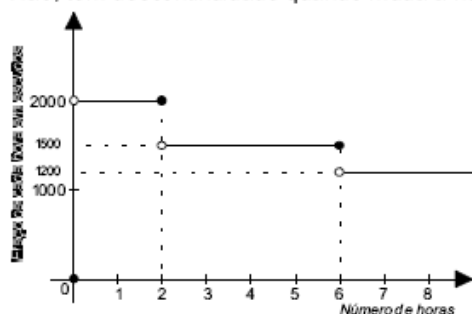
SOLUÇÕES

1.

- $D_g = [0, 7]$; $D'_g = [0, 4] \cup \{5\}$.
- $[0, 3]$ e $[6, 7]$.
- 5.
- Mínimos relativos: 0 (em zero) e 1 (em 6); mínimo absoluto 0 (em zero).
- Em 3 não é contínua, há ruptura do gráfico.
Em 5 é contínua, não há ruptura do gráfico.

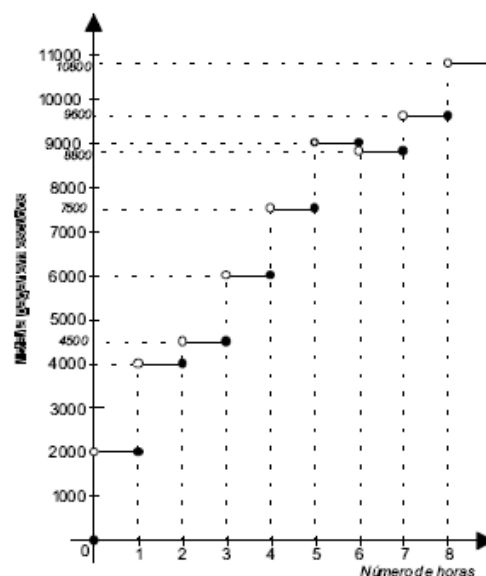
2.

- 7500\$00.
- 3 horas.
- Sim, é mais económico 7 h que 6 h.
- Não, tem descontinuidade quando muda a hora.



e)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow t = 0 \\ 2000 & \Leftarrow 0 < t \leq 2 \\ 1500 & \Leftarrow 2 < t \leq 6 \\ 1200 & \Leftarrow t > 6 \end{cases}$$



g)

- h) Não é injectiva, pois há objectos diferentes com a mesma imagem. Com efeito e por exemplo, o custo é igual tanto para 15 como para 45 minutos.

4.

- $x = 2$.
- $x > 2$.

5.

- $y = 12 - x$.
- 0 e 12, 2 e 10, 3 e 9 (p.e.).
- 4 e 8.

○ Módulos

6.

a) $(x, y) = (8, 0) + k(-1, 1), k \in \mathbb{R}.$

b) $y = -x + 8.$

7.

a) $(0, -\frac{3}{2})$ e $(\frac{3}{4}, 0).$

b) 9.

c) 0.

d) $a \in \mathbb{R}^-.$

8.

a) $y = -3x + 3.$

b) $y = -x + 3.$

9.

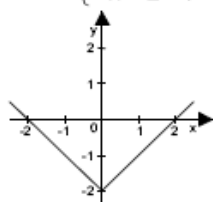
a) Espaço percorrido, respectivamente, pelo rato e pelo gato, ao fim de t segundos

b) 20 h 52 m 5, 5 s.

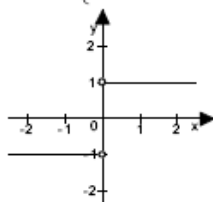
10.
$$f(x) = \begin{cases} 3 & \Leftarrow x \leq -2 \\ |x| & \Leftarrow -2 < x < 5 \\ 4 & \Leftarrow x = 5 \\ 1 & \Leftarrow 5 < x < 7 \\ 0 & \Leftarrow x = 7 \end{cases}$$

12.

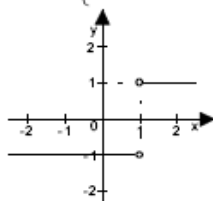
a) $f(x) = \begin{cases} x-2 & \Leftarrow x \geq 0 \\ -x-2 & \Leftarrow x < 0 \end{cases}$



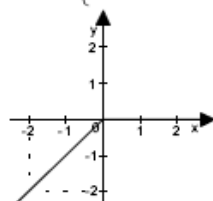
b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \Leftarrow x > 0 \\ -1 & \Leftarrow x < 0 \end{cases}$



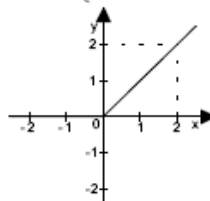
c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \Leftarrow x > 1 \\ -1 & \Leftarrow x < 1 \end{cases}$



d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow x \geq 0 \\ x & \Leftarrow x < 0 \end{cases}$

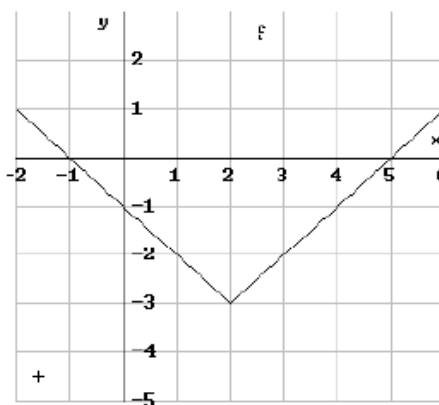


e) $f(x) = \begin{cases} x & \Leftarrow x \geq 0 \\ 0 & \Leftarrow x < 0 \end{cases}$

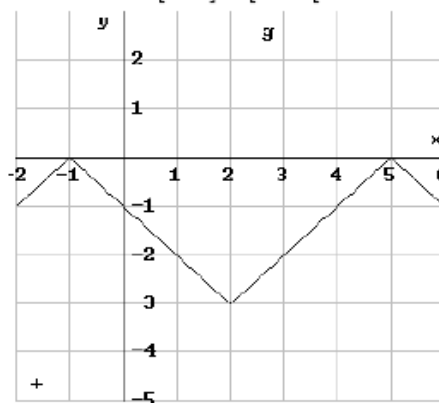


13.

a) $\{-1, 5\}.$



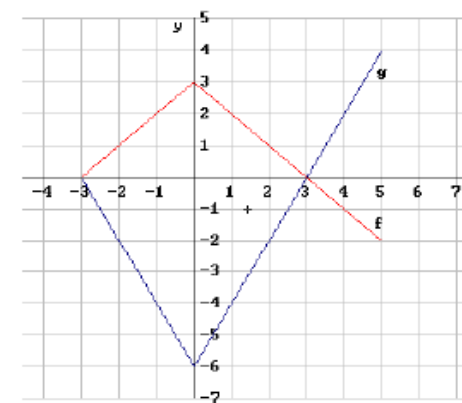
c)

d) Máximo: 0 para $x = -1$ e $x = 5.$ Crescente: $]-\infty, -1]$ e $[2, 5].$ Decrescente: $[-1, 2]$ e $[5, +\infty[.$ 

14.

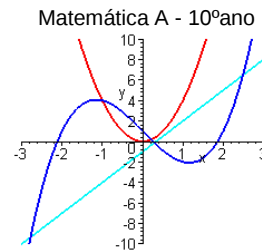
a) $[-2, 3].$

b) -2 para $x = 5.$



c)

○ Transformação de funções

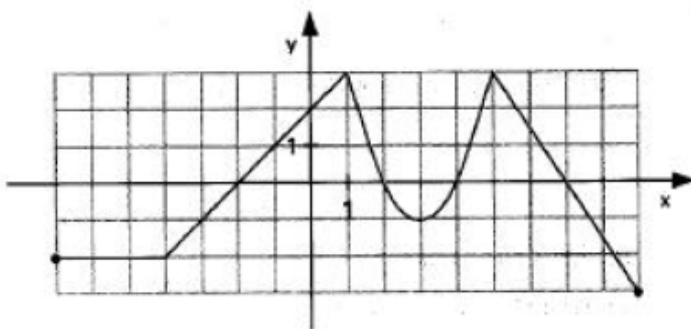


1. Considera a função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 4$. Constrói o gráfico da função f . A partir do gráfico de f constrói o gráfico das seguintes funções:

- | | |
|--------------------|-----------------------|
| a) $y = -f(x)$ | b) $y = f(-x)$ |
| c) $y = f(x) + 2$ | d) $y = f(x - 1)$ |
| e) $y = 2f(x + 1)$ | f) $y = -0.5f(x) - 4$ |
| g) $y = f(x) $ | h) $y = f(x)$ |

Escreve a expressão que define cada uma destas funções, indica os respectivos zeros e as coordenadas dos vértices.

2. Observa o gráfico da função f .



Esboça o gráfico das seguintes funções:

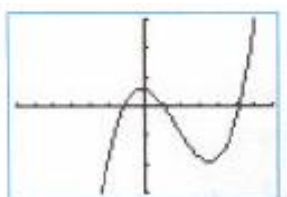
- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| a) $y = f(x) + 3$ | b) $y = f(x) - 1$ | c) $y = f(x + 3)$ |
| d) $y = f(x - 1)$ | e) $y = -f(x)$ | f) $y = f(-x)$ |
| g) $y = 4f(x)$ | h) $y = -0.5f(x)$ | i) $y = f(0.5x)$ |
| j) $y = f(-2x)$ | l) $y = f(x) $ | m) $y = f(x)$ |

3. De uma função sabe-se que:

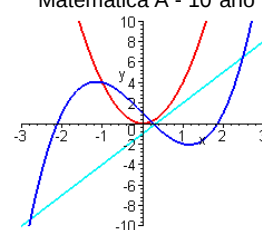
- $D = \mathbb{R}$
- $D' = [-3; 0]$
- Tem um zero para $x = -5$

Indica, justificando, o domínio, o contradomínio e os zeros da função $y = f(-x) + 1$.

4. Considera a função f com a seguinte representação gráfica.



○ Transformação de funções



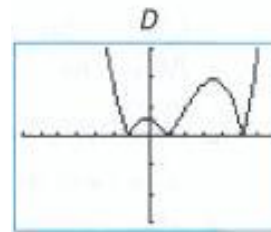
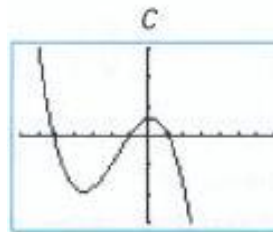
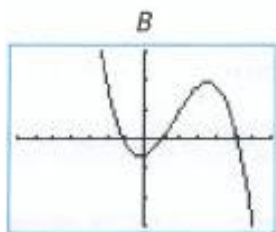
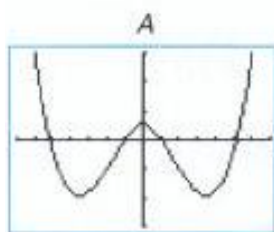
Qual dos seguintes gráficos representa a função:

a) $y = -f(x)$

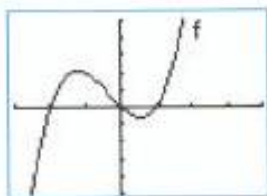
b) $y = f(-x)$

c) $y = |f(x)|$

d) $y = f(|x|)$

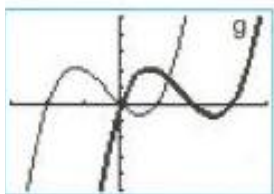


5. Considera a função $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ representada na janela $x: [-3; 4]$, $y: [-5; 5]$.

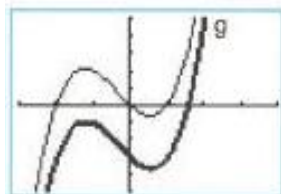


Em cada alínea escreve a expressão da função g a partir da de f .

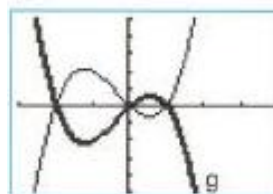
a)



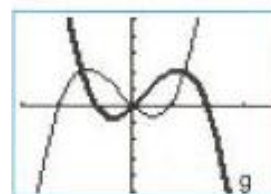
b)



c)



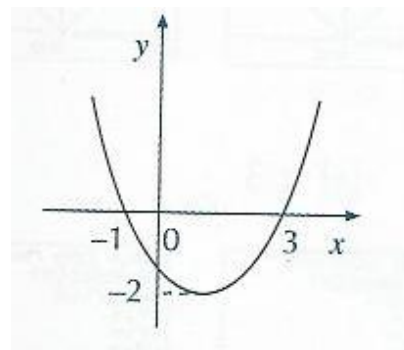
d)



6. A representação gráfica da função f é:

a) Indique o domínio da função h sendo $h(x) = f(x) - 1$

b) Determine $p \in \mathbb{R}$, de modo que $g(x) = f(x) + p$, não tenha zeros.



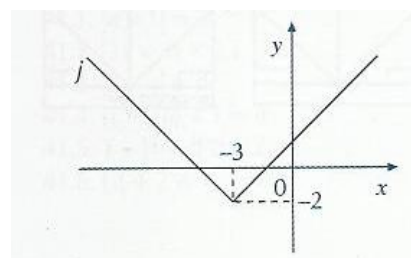
7. Considere a função f , definida por $f(x) = |x| - 2$.

a) Indique os zeros de g , sendo $g(x) = f(x + 1)$.

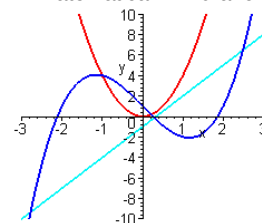
b) Estude o sinal da função h , sendo $h(x) = f(x - 4)$.

c) A função j tem a seguinte representação gráfica:

Indique o valor de k , sabendo que $j(x) = f(x + k)$



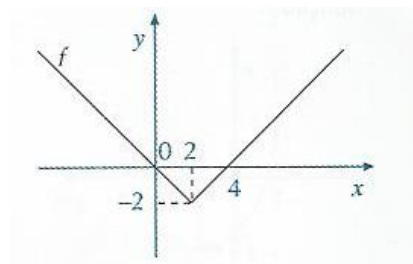
- Transformação de funções



8. Considere a função f , representada graficamente por:

Em relação à função $y = f(-x)$, indique:

- Os zeros.
- Os intervalos de monotonia.
- Os extremos.
- O sinal.



9. Considere a função f representada graficamente por:

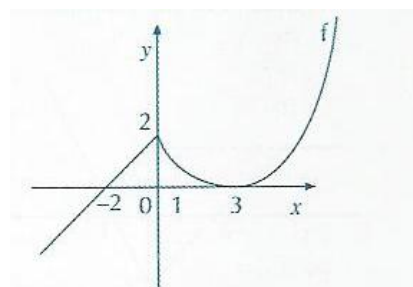
e as funções definidas por:

$$g(x) = f(-x)$$

$$h(x) = f(x-3)$$

$$i(x) = -f(x)$$

$$t(x) = |f(x)|$$



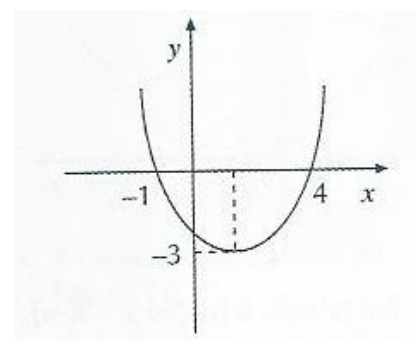
Indique:

- Zeros de g .
- Conjunto solução de $h(x) < 0$
- Intervalos de monotonia de i
- Extremos de t .

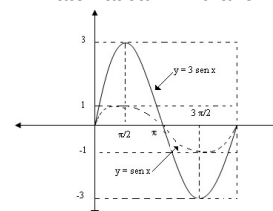
10. Na figura encontra-se representada graficamente a função h

Esboce o gráfico da função:

- $h(x-2)$
- $h(x)+3$
- $|h(x)|$
- $-h(x)$



- Exercícios de exame sobre funções



1. Observe o gráfico de uma função F .

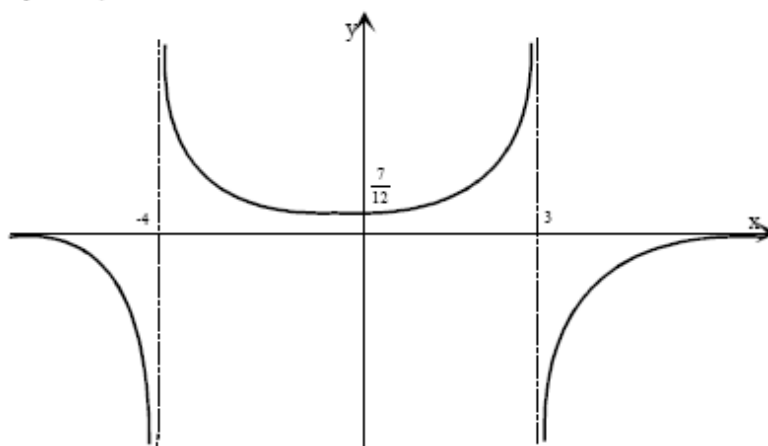
1.1 Estude o sinal de F .

1.2 Considere as funções reais de variável real, f_1 , f_2 e f_3 definidas por:

$$f_1(x) = \frac{4}{-x^2 - x + 12};$$

$$f_2(x) = \frac{7}{-x^2 - x + 12};$$

$$f_3(x) = \frac{7}{x^2 - 2x + 12}.$$



Sabendo que F é uma delas justifique que não pode ser f_1 nem f_3 .

2. Pretende-se esboçar o gráfico da função N que dá o “Nível de álcool no sangue” em função do peso p de uma pessoa, depois de ela ter ingerido um litro de cerveja. Sabe-se que:

- num litro de cerveja existem 40 g de álcool;
- $N(p)$ é a razão entre o peso (em gramas) de álcool existente no litro de cerveja e o volume (em litros) do fluido orgânico da pessoa;
- o volume do fluido orgânico de cada pessoa é numericamente igual a 70% do seu peso total (em kilogramas)

Sabendo que $N(p)$ é expresso em gramas por litro e p é expresso em kilogramas,

- determine $N(30)$, $N(60)$ e $N(80)$;
- esboce o gráfico de N quando p varia de 20 a 130;
- em Portugal a lei estabelece penas avultadas para quem for apanhado a conduzir com um nível de álcool superior a 0,5 gramas por litro. Indique, nas condições do enunciado, quem não deve conduzir depois de beber um litro de cerveja.

Para cada uma das seguintes questões, seleccione a resposta correcta entre as quatro alternativas que são indicadas, justificando a sua escolha.

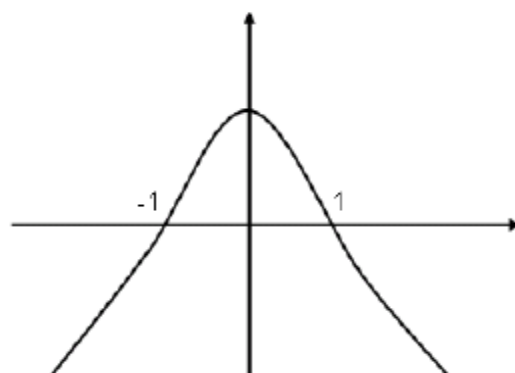
4. De uma função g , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- $g(0)=1$
- g é estritamente crescente em $[0, +\infty[$
- g é par

Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira.

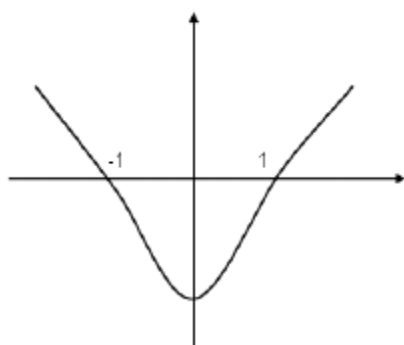
- ☐ A O contradomínio de g é $[0, +\infty[$ ☐ B g é estritamente crescente em $\mathbb{R}$
- ☐ C g é injectiva ☐ D g não tem zeros

5. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função s de domínio $\mathbb{R}$.

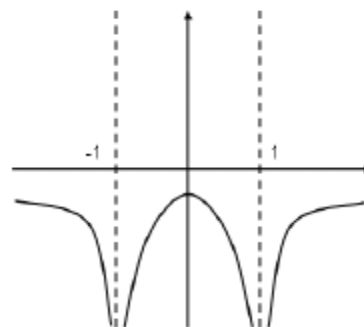


Indique qual das figuras seguintes pode ser parte da representação gráfica da função t definida por $t(x) = \frac{1}{s(x)}$

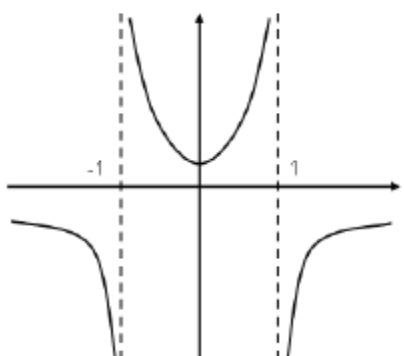
☐ A



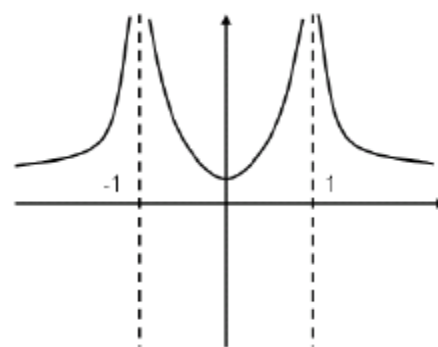
☐ B



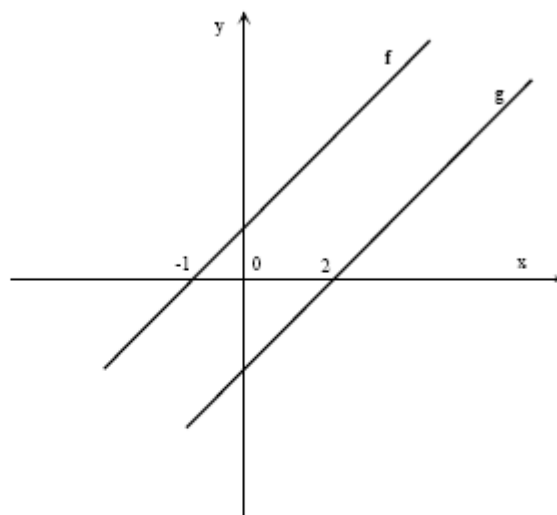
☐ C



☐ D

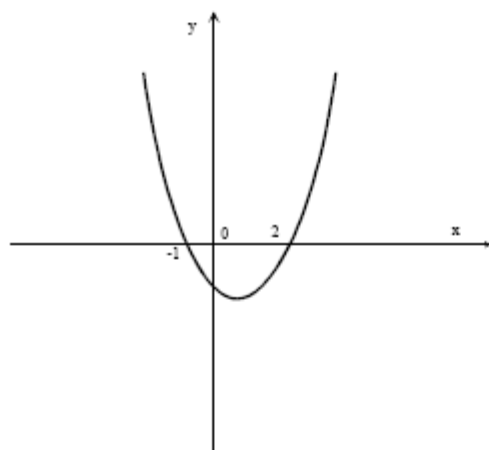


6. Na figura estão representadas graficamente duas funções: f e g .

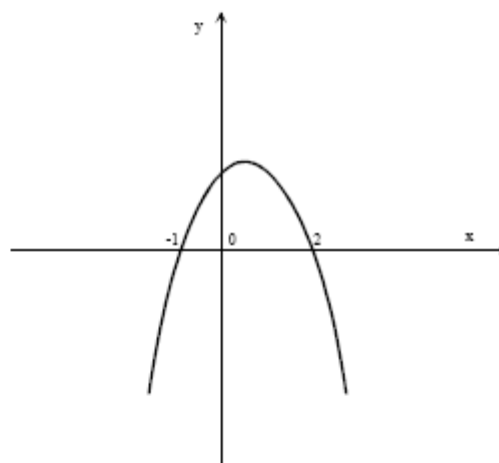


os seguintes gráficos poderá ser o da função $\frac{f}{g}$?

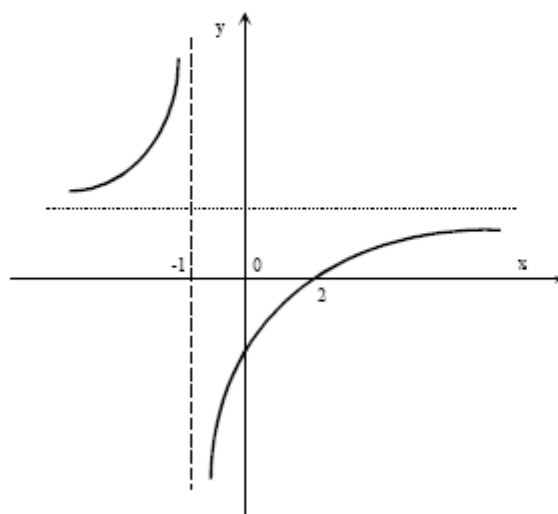
A



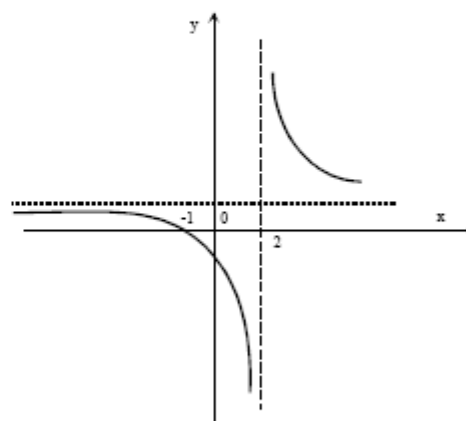
B



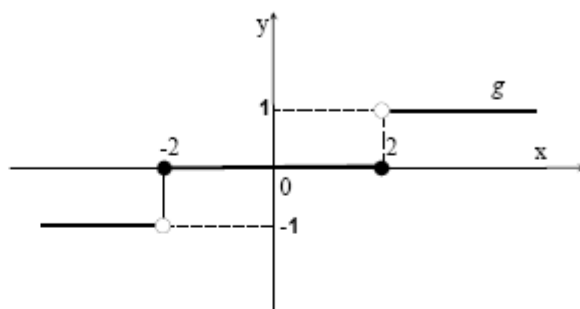
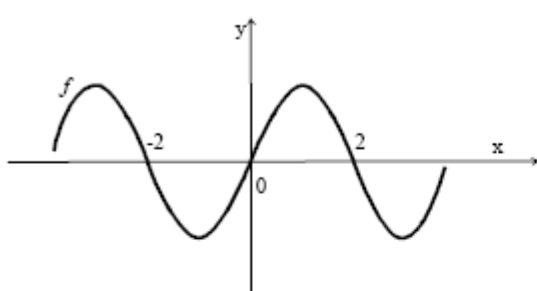
C



D



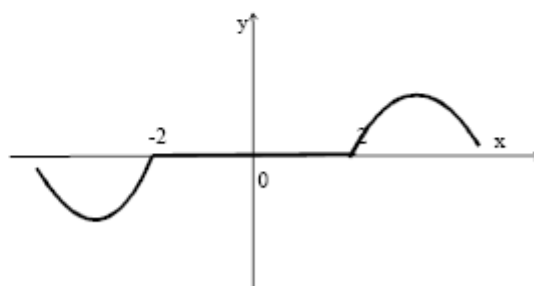
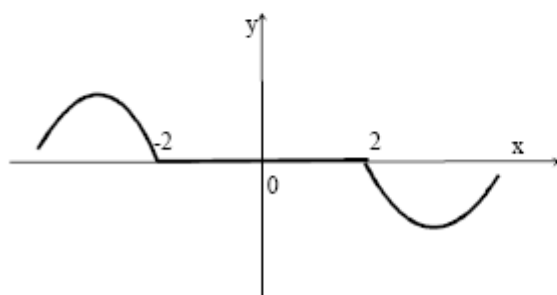
7. Considere as funções f e g de domínio $\mathbb{R}$, cujas representações gráficas se indicam a seguir:



A representação de $f \times g$ é:

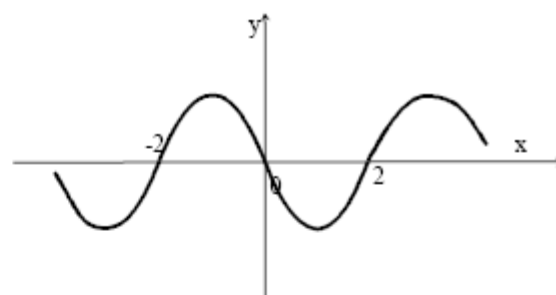
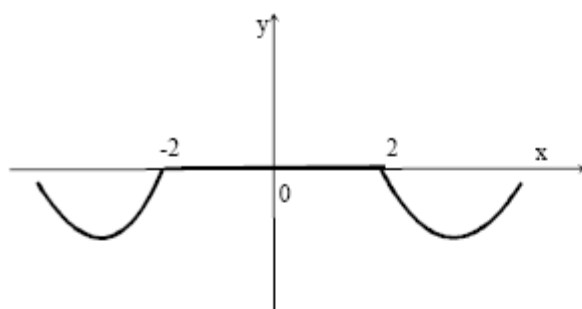
A

B



C

D



8. Numa certa localidade, o preço a pagar por mês pelo consumo de água é a soma das seguintes parcelas:

- 500 escudos pelo aluguer do contador
- 200 escudos por cada metro cúbico de água consumido até $10 m^3$.
- 400 escudos por cada metro cúbico de água consumido para além de $10 m^3$.

Indique quais das funções seguintes traduz correctamente o preço a pagar, em escudos, em função do número x de metros cúbicos consumidos.

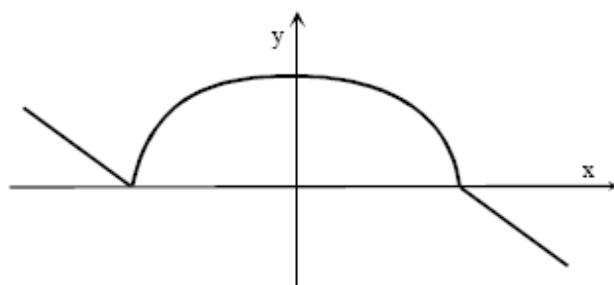
A $a(x) = \begin{cases} 700x, & \text{se } x \leq 10 \\ 500 + 400x, & \text{se } x > 10 \end{cases}$

B $b(x) = \begin{cases} 500 + 200x, & \text{se } x \leq 10 \\ 500 + 400x, & \text{se } x > 10 \end{cases}$

C $c(x) = \begin{cases} 500 + 200x, & \text{se } x \leq 10 \\ 2500 + 400x, & \text{se } x > 10 \end{cases}$

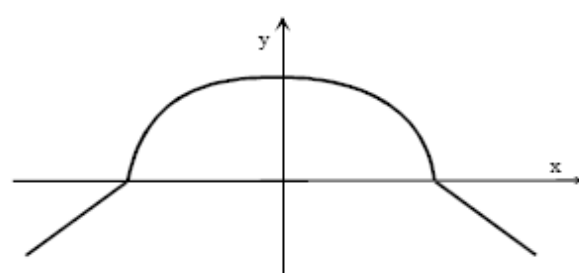
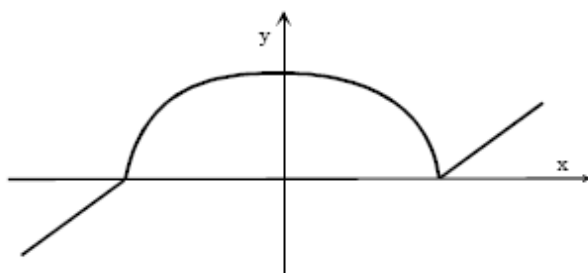
D $d(x) = \begin{cases} 500 + 200x, & \text{se } x \leq 10 \\ 2500 + 400(x - 10), & \text{se } x > 10 \end{cases}$

9. Seja f a função real de variável real cujo gráfico é



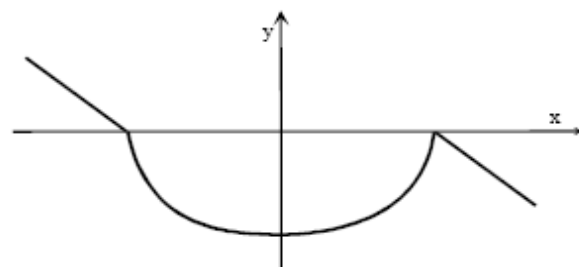
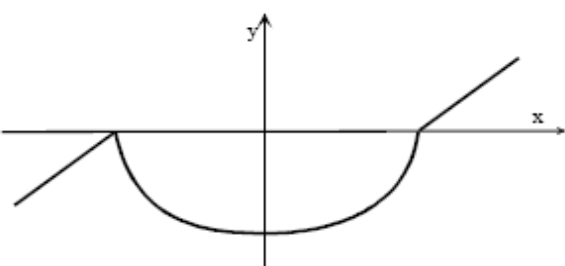
Então,
A um gráfico de $f(-x)$ é

B um gráfico de $-f(x)$ é

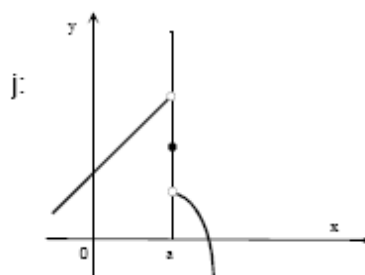
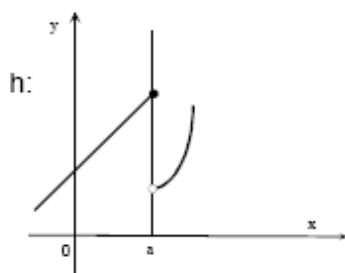
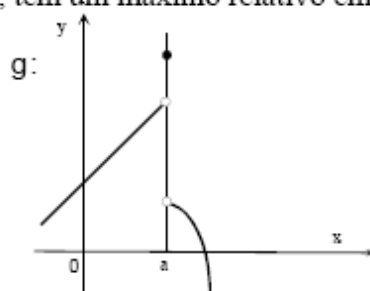
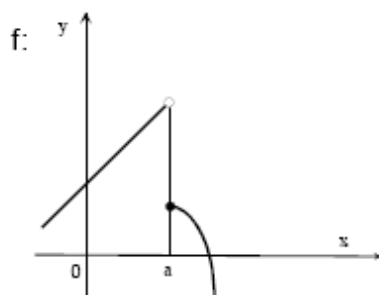


C um gráfico de $f(-x)$ é

D um gráfico de $-f(x)$ é



10. Quais das funções cujos gráficos são os seguintes, têm um máximo relativo em $x = a$?



[A] $f, g, j.$

[B] $g, h.$

[C] $f, h.$

[D] $j, g.$

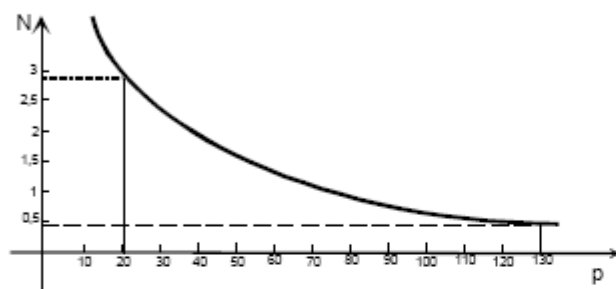
SOLUÇÕES

1ª PARTE

1. 1 F é negativa para $x < -4 \vee x > 3$. 1.2 $f_1(0) = \frac{1}{3}$ e $F(0) = \frac{7}{12}$
 F é positiva para $-4 < x < 3$. $Df_3 = \mathbb{R}$ e $DF = \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\}$

2. a) $N(30) \approx 1.90 \text{ g/l}$ $N(60) \approx 0.95 \text{ g/l}$ $N(80) \approx 0.71 \text{ g/l}$

b)



- c) Depois de beber 1 litro de cerveja, não devem conduzir as pessoas que pesam menos de 114,28 Kg.

3.

- $D_p = \mathbb{R}$
- Monotonia
 Estritamente crescente em $]0, 2[$
 Estritamente decrescente em $] -\infty, 0[\cup]2, +\infty[$
- Extremos
 P tem um mínimo relativo: $P(0) = 0$
 P tem um máximo relativo: $P(2) = 108$
- $\lim_{d \rightarrow -\infty} P(d) = +\infty$
- $\lim_{d \rightarrow +\infty} P(d) = -\infty$
- Os extremos relativos não são extremos absolutos.
- $D'_p = \mathbb{R}$

2ª PARTE

- 1 - C 2 - A 3 - D 4 - D 5 - D 6 - D 7 - C
 8 - D 9 - A 10 - B 11 - C 12 - C 13 - B

- Decomposição e resolução de equações e inequações polinomiais

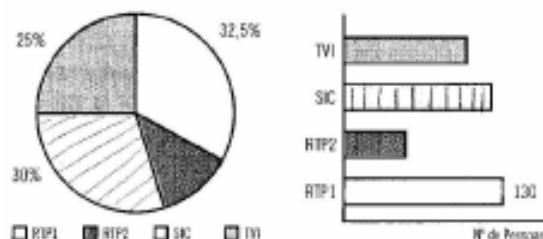
$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 x^3 + 6x^2 + 7x - 1 \\
 - x^3 - 3x^2 \\
 \hline
 3x^2 + 7x - 1 \\
 - 3x^2 - 9x \\
 \hline
 - 2x - 1 \\
 2x + 6 \\
 \hline
 5
 \end{array}
 &
 \begin{array}{r}
 x + 3 \\
 x^2 + 3x - 2
 \end{array}
 \end{array}$$

- Verifique, recorrendo ao algoritmo da divisão, que: $20x^6 - 54x^4 + 32x + 2$ é divisível por $x-1$.
- De um modo geral, que relação deve haver entre os coeficientes de um polinómio para que este seja divisível por $x - 1$?
- Determine o quociente e o resto da divisão de:
 - $4x^2 - 2x + 3$ por $x - 1$.
 - $4x - 2x^4 + 6x^2$ por $2x^2 + x - 1$
- Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:
 - $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$
 - $\left(\frac{5}{4}x^2 - x - 3\right)^2 = 0$
- Considere a função polinomial definida por $f(x) = 5x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{4}$
 - Verifique que $\frac{1}{2}$ é raiz de f .
 - Para todo o x real tem-se que $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot g(x)$.. Encontre o polinómio $g(x)$.
 - Resolva a equação $f(x) = 0$.
- Indique os polinómios do 3º grau que admitem as raízes 1, 2 e 3.
- Existe algum polinómio do 3º grau que admita as raízes 1,2,3 e 4.
- Considere a função polinomial definida por $f(x) = 6x^3 + x^2 - 31x + 10$.
 - Decomponha em factores $f(x)$.
 - Resolva a equação $f(x) = 0$.
- Considere a função polinomial definida por $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5x - 6$
 - Determine os zeros de f .
 - Determine os valores de x , para os quais a função é negativa.
- Considere a função polinomial definida por $g(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$
 - Determine os valores de x que satisfazem a condição $g(x)=0$.
 - Resolva a condição $g(3x) \geq 0$. Apresente o resultado usando intervalos.
- Considere o polinómio $p(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$.
 - Determine o polinómio $q(x)$, de tal modo que $p(x)$ seja o quadrado de $q(x)$.
 - Resolva a equação $p(x) = 0$.

- Estatística – Conceitos iniciais

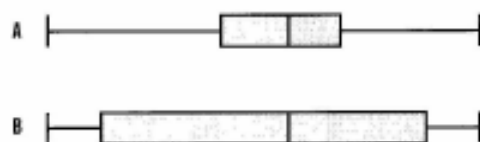
- 1) A partir de uma sondagem destinada a avaliar os canais de televisão preferidos, construíram-se os gráficos ao lado.

Qual das afirmações é verdadeira?



- (A) 25% dos telespectadores preferem a RTP2.
 (B) A variável em estudo é quantitativa e contínua.
 (C) 90 telespectadores responderam preferir a TVI.
 (D) 50 telespectadores responderam preferir a RTP2.

- 2) Os diagramas de extremos e quartis ao lado representam duas distribuições com a mesma média, a mesma mediana e os mesmos extremos. Qual das afirmações é verdadeira?

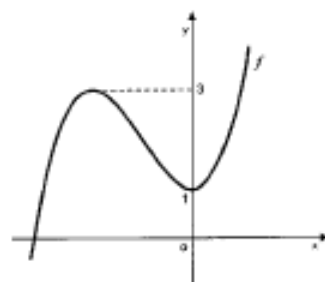


- (A) $\sigma_A > \sigma_B$ (B) $\sigma_B > \sigma_A$
 (C) $\sigma_A = \sigma_B$ (D) Não é possível comparar os desvios.

- 3) Seja f uma função polinomial do terceiro grau, cujo gráfico se encontra parcialmente representado na figura.

Quantas são as soluções da equação $f(x) = 2$?

- (A) uma (B) duas (C) três (D) quatro



4. Consideremos a distribuição:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}$$

- A) A distribuição é amodal.
 B) A distribuição é unimodal.
 C) A distribuição é bimodal.
 D) A distribuição é plurimodal.

- 1) A tabela traduz as classificações obtidas pelos alunos de determinada escola, à disciplina de Matemática A, no final do 2º período.

Nota	N.º de alunos	F_i	f_{ri}	F_{ri}
7	3			
8	4			
10	5			
11	9			
12	6			
13	5			
16	3			
18	1			

- 1.1) Complete a tabela com as frequências absolutas acumuladas, relativas e relativas acumuladas da distribuição.
- 1.2) Com base na tabela elaborada, indique:
- a percentagem de alunos que obtiveram nota 8.
 - o número de alunos com nota inferior a 12.
 - a percentagem de alunos com nota superior a 12.
- 1.3) Obtenha:
- a média, o desvio padrão e a moda da distribuição.
 - a percentagem de alunos no intervalo $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$.
- 1.4) Construa o diagrama de extremos e quartis e compare as concentrações dos vários intervalos.

- 2) Para analisar o desenvolvimento de um eucaliptal de dois anos de idade, foi medido, a um metro do solo, o diâmetro (em cm) das árvores de uma parte do terreno. Os dados recolhidos foram representados através do histograma abaixo.

As árvores com diâmetro inferior a 8cm são consideradas abaixo do desenvolvimento normal e as árvores com mais de 10cm com desenvolvimento superior ao esperado.

- 2.1) Indique a percentagem de eucaliptos que é de prever com desenvolvimento aquém do normal.

- 2.2) Indique a classe modal da distribuição e qual o seu significado.

- 2.3) O dono deste eucaliptal, ao pretender vendê-lo, apresentou os dados recolhidos ao comprador e afirmou que o diâmetro mediano dos eucaliptos é de 9,5 centímetros. Estará ele a falar verdade?

Suponha que é o comprador.

Que argumentos poderá utilizar para conseguir comprar o eucaliptal por um preço mais baixo que o pedido pelo vendedor?

